

البرهان الإستدلالي

****** في ما سبق أستنتجنا عملياً باستخدام الأدوات الهندسية في القياس بعض الخواص والنتائج الهندسية و سوف نستخدم هذه الخواص والنتائج والنظريات في الإستدلال على الحلول و البراهين للنظريات والتمارين نظرياً دون اللجوء إلى استخدام الهندسية في القياس

**** خطوات البرهان :**

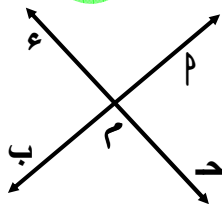
- (١) تحديد المعلومات المتاحة بالمسألة " المعطيات "
- (٢) تحديد المراد إيجاده أو إثبات صحته " المطلوب "
- (٣) استخدام المعطيات للوصول إلى المطلوب من خلال ترتيب خطوات لإيجاد أو إثبات صحة المطلوب " البرهان "
- (٤) أحياناً تحتاج المسألة لبعض الإضافات في الرسم لتساعد على البرهان " العمل "
- (٥) يستخدم الرمز (::) بـ " أن " ، (::) أذن في ترتيب خطوات البرهان

****** تستخدم النظريات كقاعدة أو قانون في إستنتاج المعلومات أو حل التمارين ويتم لإثبات صحتها بالبرهان ثم تستخدم في حل التمارين دون الحاجة إلى إثبات صحتها عند إستخدامها في حل المسائل المختلفة ومن هذه النظريات :

نظرية (١) :

إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين في القياس

أحدهما يحمل هذه القاعدة متساويان في المساحة



المعطيات : $p \parallel b$ ، $e \parallel c$ مستقيمان متقاطعان في م

المطلوب : إثبات أن : $\angle e = \angle c$ ، $\angle p = \angle b$ (::)

البرهان : $\therefore \triangle P M E, \triangle M D E$ متجاورتان

حيث : $\overleftrightarrow{MD} = \overleftrightarrow{ME} \cup \overleftrightarrow{DE}$

$$\therefore \angle 180^\circ = (\angle P M D) + (\angle M D E)$$

، $\therefore \triangle P M D, \triangle M D E$ متجاورتان

حيث : $\overleftrightarrow{PD} = \overleftrightarrow{PM} \cup \overleftrightarrow{MD}$

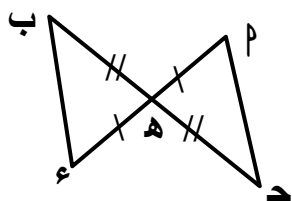
$$\therefore \angle 180^\circ = (\angle P M D) + (\angle M D E)$$

$$\therefore \angle 360^\circ = (\angle P M D) + (\angle M D E) + (\angle P M D) + (\angle M D E)$$

$$\therefore \angle 360^\circ = (\angle P M D) + (\angle M D E) \text{ وهو المطلوب}$$

، بالمثل يمكن إثبات أن : $\angle P M D = \angle M D E$

مثال :



في الشكل المقابل : $\overline{PM} \cap \overline{DE} = \{H\}$

، $\angle P M H = \angle M D H$ ، $\angle P H D = \angle M H D$ أثبت أن

$$\triangle P M H \equiv \triangle M D H$$

المعطيات : $\overline{PM} \cap \overline{DE} = \{H\}$ ، $\angle P M H = \angle M D H$ ، $\angle P H D = \angle M H D$

المطلوب : إثبات أن : $\triangle P M H \equiv \triangle M D H$

البرهان : $\therefore \overline{PM} \cap \overline{DE} = \{H\}$ ، $\angle P M H = \angle M D H$ ، $\angle P H D = \angle M H D$

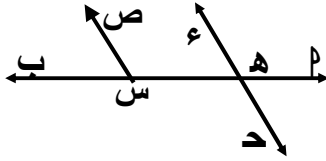
$$\therefore \angle P M H = \angle M D H \text{ بالتقابل بالرأس}$$

$$\therefore \triangle P M H \equiv \triangle M D H \text{ فيهما :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle P M H = \angle M D H \\ \angle P H D = \angle M H D \end{array} \right\}$$

$$\therefore \angle P M H = \angle M D H \text{ "برهاناً"}$$

$$\therefore \triangle P M H \equiv \triangle M D H \text{ وهو المطلوب}$$



تدريب : فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{ب} \cap \overleftrightarrow{د} = \{ه\}$
 $\overleftrightarrow{ص} \parallel \overleftrightarrow{د}$ ، $\overleftrightarrow{س} \supset \overleftrightarrow{پ}$

، $\angle(ص س ب) = 40^\circ$ أوجد $\angle(پ ه د)$

المعطيات :

المطلوب :

"معطى" ، $\overleftrightarrow{پ} \cap \overleftrightarrow{ب}$ قاطع لهما

البرهان : $\overleftrightarrow{س} \parallel \overleftrightarrow{ص}$

$\therefore \angle(د ه ب) = \angle(و د ب)$ بالتناظر

، $\overleftrightarrow{ب} \cap \overleftrightarrow{د} = \{ه\}$

$\therefore \angle(د ه ب) = \angle(و د ب)$ بالتقابل بالرأس

$\therefore \angle(د ه ب) = \angle(و د ب)$ وهو المطلوب

نظرية (٢) : مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى 360°

المعطيات : $\overleftrightarrow{و} ، \overleftrightarrow{ب} ، \overleftrightarrow{د} ، \overleftrightarrow{ع}$ أشعة نقطة البداية لكل منها " و "

المطلوب : إثبات أن : مجموع قياسا الزوايا المتجاورة المتجمعة حول و يساوى 360°

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{ع}$ و

البرهان : $\therefore \angle(د ه ب) + \angle(ب ه و) + \angle(و ه ع) = 180^\circ$

، $\angle(د ه ب) + \angle(ب ه و) = 180^\circ$

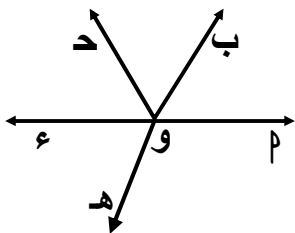
$\therefore \angle(د ه ب) + \angle(ب ه و) + \angle(و ه ع) + \angle(ع ه د) = 360^\circ$

$360^\circ = 180^\circ + 180^\circ = \angle(د ه ب) + \angle(ب ه و) + \angle(و ه ع) + \angle(ع ه د)$

$\therefore \angle(د ه ب) + \angle(ب ه و) + \angle(و ه ع) + \angle(ع ه د) = 360^\circ$

وهو المطلوب $360^\circ =$

تدريب :

في الشكل المقابل : $\angle a = 50^\circ$ و $\angle b = 100^\circ$ ، $\angle c = 65^\circ$ ، $\angle d = 80^\circ$ ،، $\angle e$ ينصف $\angle b$ و $\angle f$ أوجد $\angle g$ و $\angle h$

المعطيات :

المطلوب : إيجاد $\angle g$ و $\angle h$ البرهان : $\angle e$ ينصف $\angle b$ ، " معطى "

$$\therefore \angle b = 2 \angle e \text{ و } \angle c = 2 \angle f$$

$$\therefore \angle a + \angle b + \angle c + \angle d = 360^\circ$$

$$50^\circ + 100^\circ + 65^\circ + \angle d = 360^\circ$$

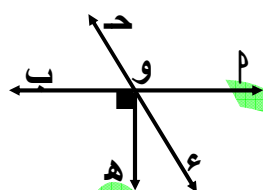
$$\therefore \angle d = 145^\circ$$

$$\therefore \angle e = 72.5^\circ$$

$$\therefore \angle f = 36.25^\circ$$

وهو المطلوب

تدريب :

في الشكل المقابل : $\angle a = 90^\circ$ و $\angle b = 46^\circ$ ،

$$\angle c = 90^\circ$$

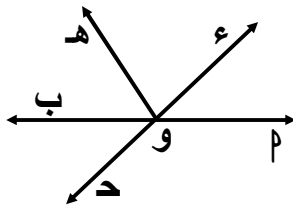
أوجد $\angle d$ و $\angle e$ ، $\angle f$ و $\angle g$

المعطيات :

المطلوب :

البرهان :

تمارين

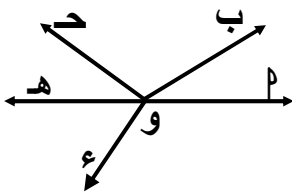


(١) فى الشكل المقابل :

$$\vec{p} \cap \vec{h} = \{و\} ، و (\angle هـ و ع) = 90^\circ$$

$$، و (\angle م و ع) = 40^\circ \text{ أوجد : } و (\angle ب و هـ) ، و (\angle م و د)$$

$$و (\angle ب و هـ) ، و (\angle م و د)$$

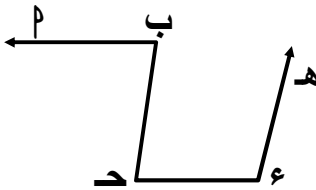


(٢) فى الشكل المقابل :

$$و (\angle ب و د) = 2^\circ$$

$$، و (\angle م و ب) = 48^\circ ، و (\angle ع و هـ) = 80^\circ$$

$$، و (\angle د و هـ) \text{ أوجد } و (\angle م و ع)$$



(٣) فى الشكل المقابل :

$$\vec{p} \parallel \vec{ب} ، \vec{د} \parallel \vec{هـ}$$

$$، و (\angle ب د ع) = 48^\circ \text{ أوجد } و (\angle د ع هـ)$$

(٣) فى الشكل المقابل :

$$\vec{د} \parallel \vec{ب} ، \vec{هـ} \supset \vec{م}$$

$$، و (\angle ب هـ) = 45^\circ ، و (\angle ع) = 135^\circ$$

$$\text{أثبت أن } \vec{م} \parallel \vec{د}$$

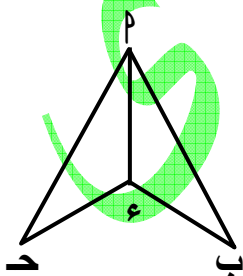
(٣) فى الشكل المقابل :

$$\vec{م} = \vec{ب} ، \vec{د} = \vec{ع}$$

$$، و (\angle ب ع د) = 110^\circ$$

$$\text{أثبت أن } \triangle م ب ع \equiv \triangle م د ع$$

$$\text{ثم أوجد } و (\angle م د ع)$$



المضلع

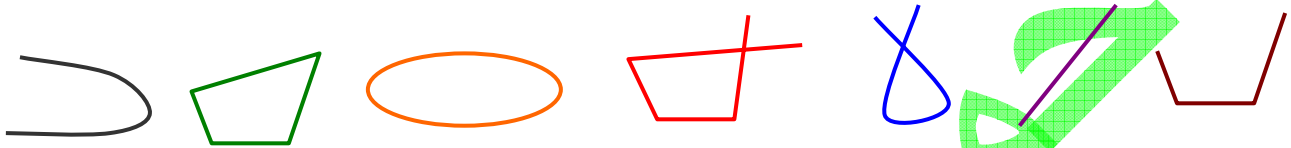
الخط البسيط : هو الخط الذي لا يقطع نفسه

الخط غير البسيط : هو الخط الذي يقطع نفسه

الخط المفتوح : هو الخط الذي نقطة بدايته غير نقطة نهايته

الخط المغلق : هو الخط الذي ينتهي عند النقطة التي بدأ منها

تدريب : في الأشكال الآتية عين الخط البسيط ، الخط غير البسيط ، الخط المفتوح ، الخط المغلق



المضلع : هو خط مغلق بسيط مكون من اتحاد عدة قطع مستقيمة

ملاحظات : ** كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع

** يسمى المضلع بعدد أضلاعه

أمثلة :



٥ أضلاع



٤ أضلاع



٣ أضلاع

المضلع المحدب :



في المضلع المحدب أي مستقيم يتعين برأسين متتالين

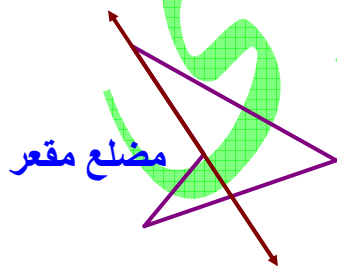
تكون بقية رؤوس المضلع واقعة في أحد جانبي هذا المستقيم

ويلاحظ أن أي زاوية من زواياها قياسها أقل من ١٨٠°

المضلع المقعر : في المضلع المقعر توجد مستقيمات تتعين برأسين

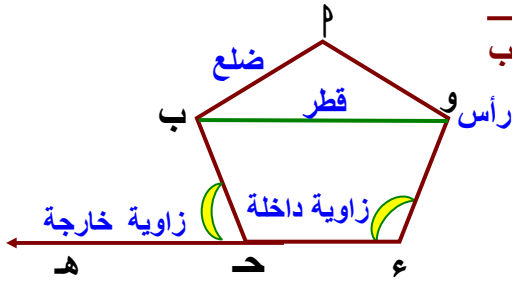
متتالين و تقع بقية رؤوس المضلع على جانبي هذه

المستقيمات



ويلاحظ أنه توجد زاوية واحدة على الأقل من زواياها قياسها أكبر من ١٨٠° (زاوية منعكسة)

**** إذا ذكر أي مضلع يقصد بذلك المضلع المحدب ما لم يذكر أنه مقعر**



ملاحظات : ** كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع مثل $\overline{پ ب}$

** كل نقطة ناتجة عن تلاقي ضلعين

متجاورين من أضلاع المضلع تسمى

رأس مثل **و**

** عدد أضلاع أى مضلع = عدد رؤوسه = عدد زواياه

** كل زاوية ناتجة من إتحاد ضلعين من أضلاع المضلع تسمى

زاوية داخلية مثل $\angle هـ$ ؛ $\angle و هـ$

** إذا مد أحد أضلاع مضلع من إحدى جهتيه إلى ما لا نهاية تنتج زاوية تسمى

زاوية خارجية مثل $\angle ب هـ$

** محيط المضلع هو = مجموع أطوال المضلع

** القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متتالين فى المضلع تسمى

قطر المضلع مثل $\overline{و ب}$

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

عدد الأقطار	عدد الزوايا	عدد الرؤوس	عدد الأضلاع	إسم المضلع
صفر	٣	٣	٣	الثلاثى " مثلث "
٢	٤	٤	٤	الرباعى
			٥	الخماسى
			٦	السداسى
			٧	السباعى
			٨	الثمانى
			٩	التساعى
			١٠	العشارى
			ن	النونى

$$\text{عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه } ن = \frac{ن(ن-٣)}{٢}$$

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع :

نعلم أن : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

فإذا رسمت الأقطار الخارجة من أى رأس من رؤوس المضلع ينقسم المضلع لعدد من المثلثات

نستنتج مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

إسم المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات الناتجة	مجموع قياسات الزوايا الداخلة
الرباعي	٤	٢	$180 \times 2 = 360^\circ$
الخماسي	٥		
السداسي	٦		
السباعي	٧		
الثماني	٨		
التساعي	٩		
العشاري	١٠		
النوني	n		

عدد المثلثات التي ينقسم إليها مضلع عدد أضلاعه $n = n - 2$ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه $n = 180 \times (n - 2)$

ملاحظة :

إذا مدت المستقيمات الحاملة لأضلاع مضلع من جهة

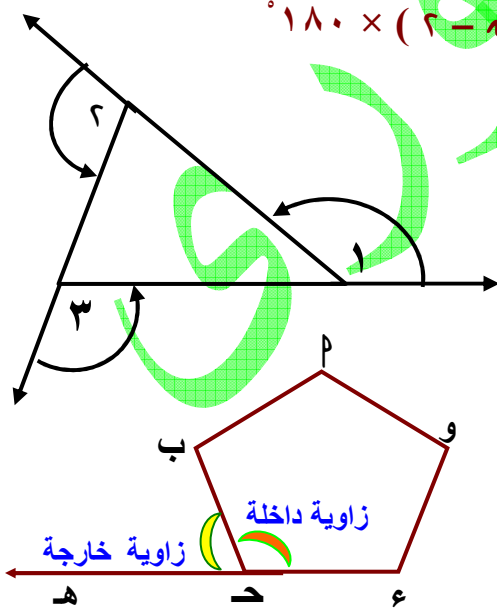
واحدة و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ينتج :

عدد أضلاع المضلع = عدد رؤوسه

= عدد زواياه الداخلة

= عدد زواياه الخارجة

عند أى رأس من رؤوس المضلع يكون :

مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة = 180° 

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه $n = 360^\circ$

∴ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس $= 180^\circ$

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس $= n \times 180^\circ$

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه $n = (n - 2) \times 180^\circ$ ،

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة $= n \times 180^\circ - (n - 2) \times 180^\circ$

$$= 360^\circ = 360^\circ + n \times 180^\circ - n \times 180^\circ$$

تدريب :

أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى

∴ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس $= 180^\circ$

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع السداسى $= 6 \times 180^\circ$

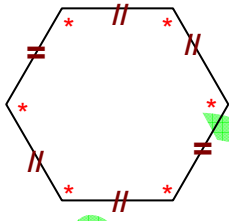
∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع السداسى $= (6 - 2) \times 180^\circ$ ،

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى $= 6 \times 180^\circ - (6 - 2) \times 180^\circ$

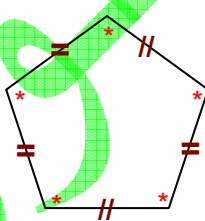
المضلع المنتظم :

هو المضلع الذى تتساوى فيه أطوال أضلاعه وتتساوى قياسات زواياه

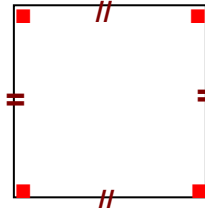
أمثلة :



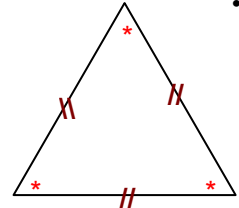
سداسى منتظم



خماسى منتظم



مربع



مثلث متساوى الأضلاع

قياس كل زاوية من زوايا مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه $n = \frac{180^\circ \times (n - 2)}{n}$

محيط مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه $n = \text{طول الضلع} \times n$

عدد أضلاع المضلع المنتظم $= \frac{360^\circ}{\text{قياس إحدى زواياه الداخلة} - 180^\circ}$ حيث س

تدريب : أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسي منتظم

$$\frac{(\text{.....} - 5) \times \text{.....}}{\text{.....}} = \text{قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسي منتظم}$$

$$\text{.....} = \text{.....}$$

تدريب : مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة 140° أوجد عدد أضلاعه

$$\text{.....} = \frac{180 \times (2 - n)}{n} \quad \therefore 140 = \frac{180 \times (2 - n)}{n}$$

$$\text{.....} = 140 = -\text{.....} \quad \therefore \text{.....} = 140 = -\text{.....}$$

$$\text{.....} = n \quad \therefore \text{.....} = n$$

$$\therefore \text{عدد أضلاع المضلع} = \text{.....} = \text{ضلع}$$

حل آخر

$$\text{عدد أضلاع المضلع} = \frac{360}{140 - 180} = \text{.....} = \text{ضلع}$$

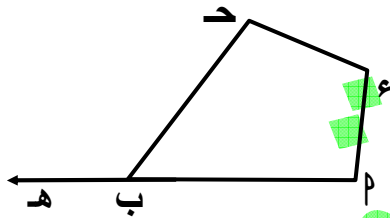
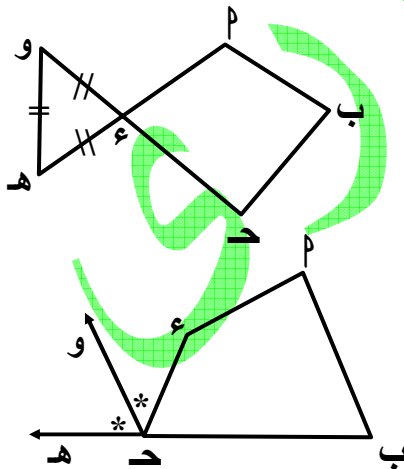
تدريب : أكمل الجدول الآتي :

عدد أضلاع مضلع منتظم	٣	٤		٧	٨	١٠	
قياس إحدى زواياه الداخلة			120°	135°			160°

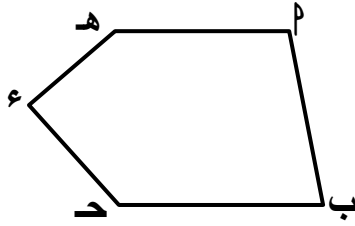
تمارين

١ - أكمل ما يأتي :

- (١) يكون المضلع منتظماً إذا كان ،
 (٢) عدد المثلثات التي ينقسم إليها أى مضلع يساوى
 (٣) مجموع قياسات زوايا المضلع الخماسى المنتظم =
 (٤) قياس كل زاوية من زوايا المضلع السداسى المنتظم =
 (٥) محيط مضلع منتظم طول ضلعه ٥ سم =
 (٦) طول ضلع مضلع رباعى منتظم محيطه ١٦ سم =
 (٧) المضلع الذى ليس له أقطار هو
 (٨) عدد أقطار المضلع الرباعى =
 (٩) عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه 120° =

٢ - فى الشكل المقابل : $\angle P = 80^\circ$ ، $\angle E = 120^\circ$ $\overrightarrow{ME} \supset \overrightarrow{MB}$ ، $\angle H = 130^\circ$ أوجد $\angle EDB$ ٣ - فى الشكل المقابل: $\overrightarrow{ME} \cap \overrightarrow{DO} = \{E\}$ ، $\angle P = 125^\circ$ ، $\angle D = 100^\circ$ أوجد $\angle PDB$ ٤ - فى الشكل المقابل : $\angle P = 120^\circ$ $\overrightarrow{ME} \supset \overrightarrow{MB}$ ، $\angle B = 60^\circ$ ، $\overrightarrow{DO}$ ينصف $\angle EDB$ أوجد $\angle ODH$ ثم أثبت أن $\overrightarrow{DO} \parallel \overrightarrow{MB}$

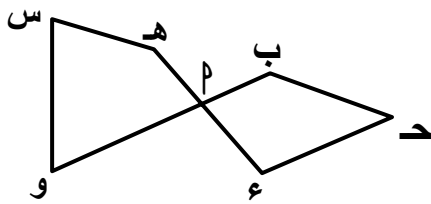
٥ - فى الشكل المقابل : $\overline{p} \parallel \overline{b}$ شكل خماسى فيه $\overline{p} \parallel \overline{b}$



$$^{\circ}120 = (\angle d), \quad ^{\circ}85 = (\angle e)$$

أوجد $(\angle h)$

٥ - فى الشكل المقابل : $\overline{p} \cap \overline{h} = \{p\}$

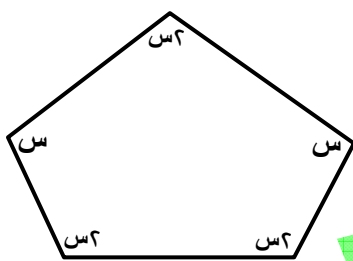


$$^{\circ}120 = (\angle b), \quad ^{\circ}45 = (\angle d),$$

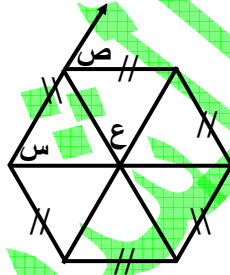
$$^{\circ}130 = (\angle h), \quad ^{\circ}105 = (\angle e),$$

$$^{\circ}80 = (\angle s), \quad \text{أوجد } (\angle w)$$

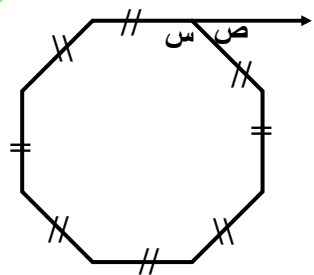
٦ - فى الأشكال الآتية أوجد قياسات الزوايا : س ، ص ، بالدرجات



٣



٢



١

٧ - إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمضلع خماسى هى $2 : 2 : 3 : 4 : 4$

أوجد أصغر زوايا هذا المضلع

٨ - عل للمضلع المنتظم زاوية داخلة قياسها 100° ؟ ولماذا ؟

٩ - إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمضلع منتظم 30° ، و ما عدد أضلاع هذا المضلع ؟

، و ما مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟

١٠ - مضلع له تسعة أضلاع و مجموع قياسات ثمان من زواياه هو 1140° أوجد قياس

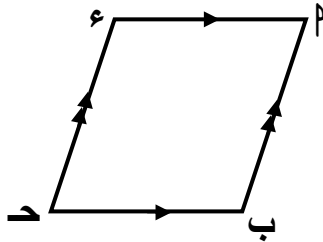
الزاوية التاسعة ، هل يمكن أن يكون هذا المضلع منتظماً ؟ ولماذا ؟

١١ - مضلع عدد أضلاعه ١٥ ضلع فإذا كان مجموع قياسات خمسة من زواياه الخارجة يساوى

200° أوجد مجموع قياسات الزوايا العشرة الداخلة غير المجاورة للزوايا الخمسة الخارجة

متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع :



هو شكل رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

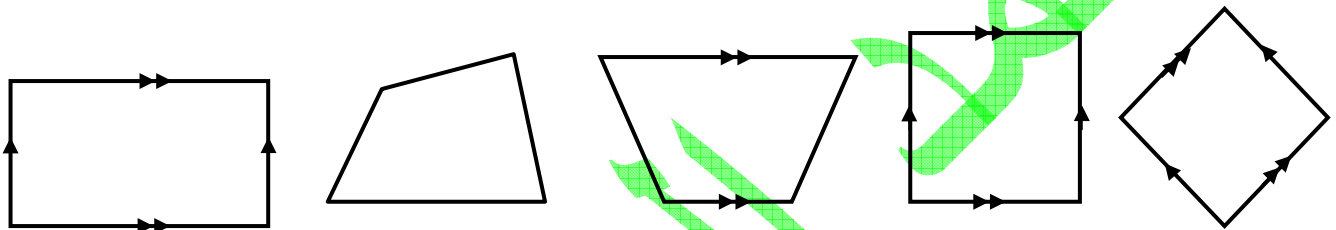
في الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{م ب} \parallel \overline{د أ}$ ، $\overline{م د} \parallel \overline{ب ج}$

فإن : الشكل $م ب د ج$ يكون متوازي أضلاع

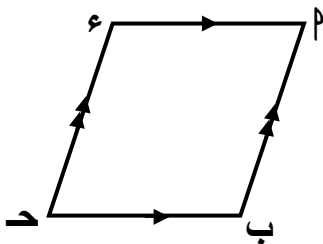
، وبالعكس إذا كان : الشكل $م ب د ج$ يكون متوازي أضلاع

فإن : $\overline{م ب} \parallel \overline{د أ}$ ، $\overline{م د} \parallel \overline{ب ج}$

تدريب : في الأشكال المقابلة بين أي منها متوازي أضلاع



خواص متوازي الأضلاع :



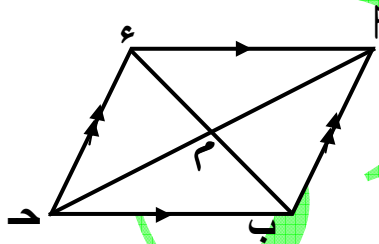
إرسم متوازي الأضلاع $م ب د ج$

قس أطوال أضلاعه : $\overline{م ب}$ ، $\overline{د أ}$ ، $\overline{م د}$ ، $\overline{ب ج}$

ماذا تلاحظ ؟

قس قياسات زواياه : $\angle م$ ، $\angle ب$ ، $\angle ج$ ، $\angle د$

ماذا تلاحظ ؟



و إذا وصلنا قطراه $\overline{م د}$ ، $\overline{ب ج}$ بحيث يتقاطعان في $ن$

قس أطوال : $\overline{م ب}$ ، $\overline{م د}$ ، $\overline{ن ب}$ ، $\overline{ن د}$ ، $\overline{م ج}$ ، $\overline{ن ج}$

ماذا تلاحظ ؟

خواص متوازي الأضلاع : (١) كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس

(٣) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان

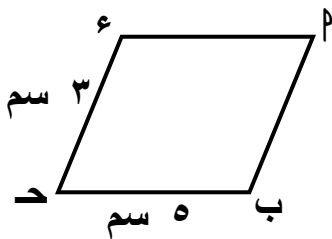
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

ملاحظة :

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توافر فيه أحد الشروط الآتية :

- (١) كل ضلعين متقابلين متوازيان
- (٢) كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول
- (٣) كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس
- (٤) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
- (٥) القطران ينصف كل منهما الآخر
- (٦) ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين في الطول

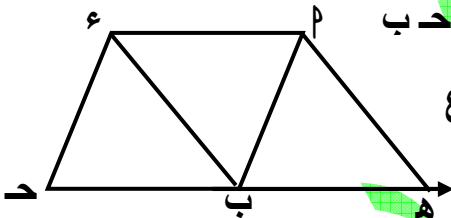
تدريبات :



(١) في الشكل المقابل : م ب د ع متوازي أضلاع

أكمل ما يأتي : م ب //
 د ع = سم

محيط متوازي الأضلاع م ب د ع = سم



(٢) في الشكل المقابل : م ب د ع متوازي أضلاع ، هـ د ب

بحيث د ب = ب هـ أثبت أن : م هـ ب ع متوازي أضلاع

الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∴ م ب د ع متوازي أضلاع

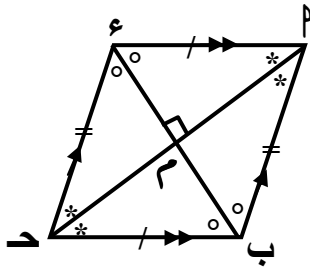
∴ د ب = ب هـ ،

∴ م ب د ع متوازي أضلاع

∴ م ب = ع د ، م ب // ع د

∴ د ب = ب هـ ، د ب // ب هـ

حالات خاصة من متوازي الأضلاع :



(١) **المعين** : هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول

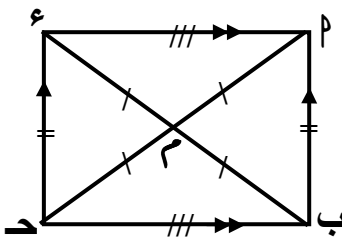
أ، هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان

خواص المعين : له جميع خواص متوازي الأضلاع السابق ذكرها

بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية في الطول

* قطراه متعامدان و كل منهما قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما



(١) **المستطيل** : هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

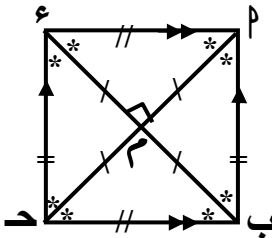
أ، هو متوازي أضلاع قطراه متساويان في الطول

خواص المستطيل : له جميع خواص متوازي الأضلاع السابق ذكرها

بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* زواياه متساوية في القياس وقياس كل منها 90°

* قطراه متساويان في الطول



(١) **المربع** : هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران

متساويان في الطول

أ، هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول

أ، هو معين إحدى زواياه قائمة

خواص المربع : له جميع خواص متوازي الأضلاع السابق ذكرها

بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية في الطول

* زواياه متساوية في القياس وقياس كل منها 90°

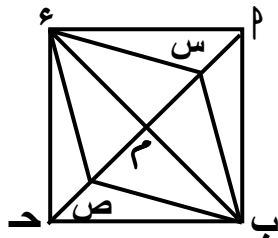
* قطراه متساويان في الطول و متعامدان و كل من قطراه ينصف زاويتي الرأس

الواصل بينهما

إثبات أن متوازي الأضلاع معين أو مستطيل أو مربع نثبت أحد خواص الشكل المطلوب إثباته

تدريبات : (١) أكمل الجدول التالى بوضع علامة ✓ أمام كل خاصية للشكل :

المربع	المعين	المستطيل	متوازي الأضلاع	الخواص
✓	✓	✓	✓	كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول
				كل ضلعين متقابلين متوازيان
				كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس
				القطران ينصف كل منهما الآخر
				القطران متساويان فى الطول
				القطران متعامدان
				الأضلاع متساوية فى الطول
✓	✓	×	×	القطران ينصفان زاويتى الرأس المرسومة بينهما
				الزوايا قائمة



(٢) فى الشكل المقابل : م ب د ع مربع تقاطع قطراه فى م

س ، ص $\Rightarrow$ م د بحيث م س = د ص

أثبت أن س ب ص ع معين

الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : $\therefore$ م ب د ع مربع

$\therefore$ م م = م م

، $\therefore$ م ب = م د

، $\therefore$ م س = م د $\therefore$ م س = م م

$\therefore$ من (١) ، (٢) ينتج أن : م ب د ع مربع

، $\therefore$ م ب د ع $\perp$ م د ع $\therefore$ م ب د ع معين

(١)

(٢)

١ - أكمل ما يأتي :

(٢) إذا كانت الزوايا الداخلة في الشكل الرباعي متساوية في القياس فإنه يكون أ،

(٤) في متوازي الأضلاع إذا تساوى القطران في الطول فإنه يكون

(٦) قطرا المستطيل ،

(٧) في المربع القطران ، ، ، ،

(٨) متوازي الأضلاع الذي قطراه متعامدان ومتساويان في الطول يسمى

(٩) قياس الزاوية المحصورة بين ضلع المربع وقطره = ٠.٠.٠.٠

(١٠) في متوازي الأضلاع $ABCD$ إذا كان $\angle A = 70^\circ$ فإن $\angle C =$ ؟

(١١) في متوازي الأضلاع $ABCD$ إذا كان $\angle A = 70^\circ$ فإن $\angle C = \dots\dots\dots$

(١٢) في المعين م ب ح د إذا كان $\angle م ح ب = ٤٠^\circ$ فإن $\angle د = ١٤٠^\circ$

(١٣) القطران متساويان في الطول في ٠٠٠٠ ومتعامدان وغير متساويين في الطول ٠٠٠٠

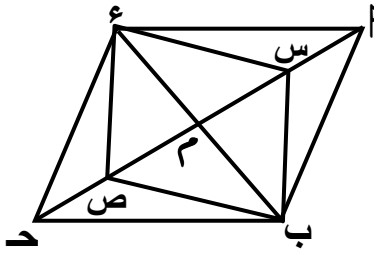
ومتساویں فی الطول ومتعامدین فی . . .



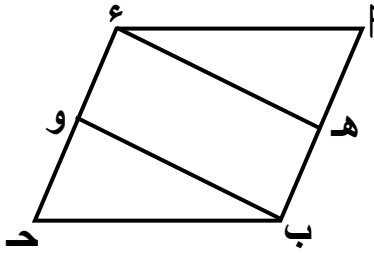
ح ، ه $\ni$ م ب ، ح بحيث ع ه // ح

، $e = 3$ سم أثبت أن e هو ب متوازي أضلاع

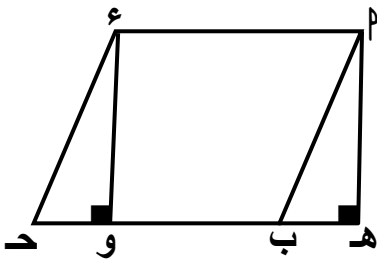
٣ - في الشكل المقابل : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع تقاطع قطراه في M ، S ، V $\overline{CD} \supset \overline{MS}$ بحيث $MS = DV$
 أثبت أن : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع



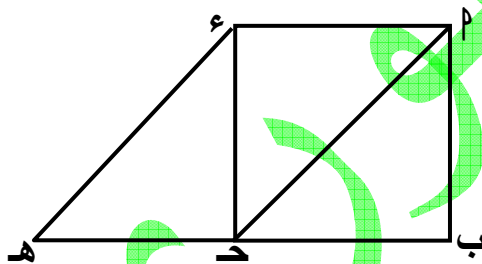
٤ - في الشكل المقابل : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع ، $\overline{EH}$ منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{VO}$ منتصف $\overline{CD}$
 أثبت أن : $\overline{EH} \parallel \overline{VO}$ متوازي أضلاع



٥ - في الشكل المقابل : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع ، $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{VO} \perp \overline{CD}$
 أثبت أن : $\overline{MH} \parallel \overline{VO}$ متوازي أضلاع



٦ - في الشكل المقابل : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع ، $\overline{EH} \supset \overline{AB}$ بحيث $EH = AB$ ، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
 أثبت أن : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ متوازي أضلاع



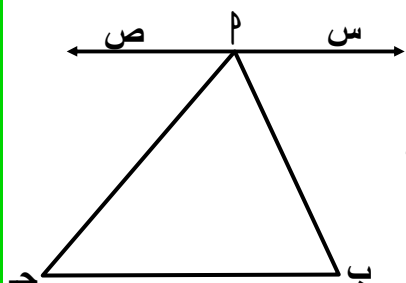
المثلث

نظرية (١) :

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي 180° المعطيات : $\triangle ABC$ مثلث

المطلوب : إثبات أن :

$$180^\circ = (\angle A) + (\angle B) + (\angle C)$$

العمل : من نقطة P نرسم $PS \parallel BC$ البرهان : $\because PS \parallel BC$

$$\therefore (\angle A) = (\angle APS) \quad \text{بالتبادل} \quad (1)$$

$$, (\angle B) = (\angle BPS) \quad \text{بالتبادل} \quad (2)$$

بجمع (١) ، (٢) ينتج

$$(\angle A) + (\angle B) = (\angle APS) + (\angle BPS)$$

بإضافة $(\angle C)$ للطرفين ينتج

$$(\angle A) + (\angle B) + (\angle C) = (\angle APS) + (\angle BPS) + (\angle C)$$

$$(\angle A) + (\angle B) + (\angle C) = (\angle APS) + (\angle BPS) + (\angle C)$$

$$\therefore 180^\circ = (\angle A) + (\angle B) + (\angle C) \quad \text{وهو المطلوب}$$

$$\therefore 180^\circ = (\angle A) + (\angle B) + (\angle C) \quad \text{وهو المطلوب}$$

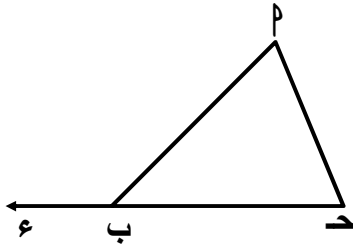
تدريب : $\triangle ABC$ فيه : $\angle A = 63^\circ$ ، $\angle B = 45^\circ$ أوجد $\angle C$

الحل

$$(\angle A) + (\angle B) + (\angle C) = 180^\circ$$

$$63^\circ + 45^\circ + \angle C = 180^\circ$$

نتيجة (١) :



قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى

الزاويتين الداخلتين عدا قياس الزاوية المجاورة لها

فى الشكل المقابل : إذا كان : $\angle P \neq \angle B$ ، مثلث $\triangle PBC$ ، $\angle A \neq \angle C$

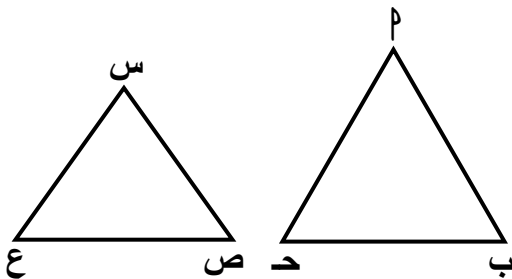
$$\angle A + \angle P = \angle C \quad \text{فإن : } \angle A + \angle P = \angle C$$

نتيجة (٢) :

إذا ساوى قياسا زاويتين فى مثلث قياسا زاويتين فى

مثلث آخر فإن قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الأول

قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الآخر



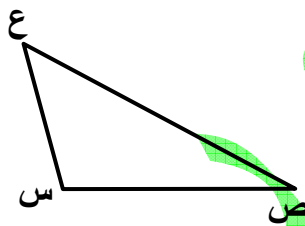
فى الشكل المقابل : إذا كان فى $\triangle PBC$ ، $\angle P = \angle S$ ، $\angle B = \angle E$ ، $\angle C = \angle V$

$$\angle P = \angle S \quad \text{فإن : } \angle C = \angle V$$

$$\angle B = \angle E \quad \text{فإن : } \angle C = \angle V$$

نتيجة (٣) :

فى أى مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل

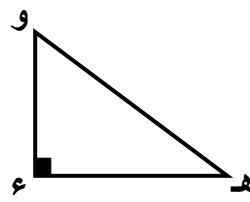


مثلث منفرج الزاوية

$\angle S$ حادة

$\angle E$ حادة

$\angle V$ منفرجة

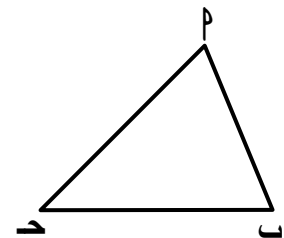


مثلث قائم الزاوية

$\angle W$ حادة

$\angle A$ حادة

$\angle E$ قائمة



مثلث حاد الزوايا

$\angle P$ حادة

$\angle B$ حادة

$\angle C$ حادة

ملاحظات :

** إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخرين يساوى 90°

" أى أن كل منهما حادة "

** إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخرين اقل من 90°

" أى أن كل منهما حادة "

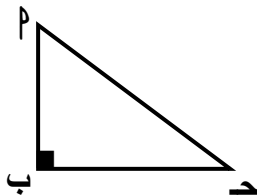
** إذا لم تكن إحدى زوايا المثلث قائمة أو منفرجة كانت زواياه الثلاثة حادة

نتيجة (٣) :

إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين

الأخرين كان المثلث قائم الزاوية

فى الشكل المقابل : إذا كان فى ΔPAB



$$\angle A + \angle P = \angle B$$

$$\angle B = 90^\circ$$

ملاحظة :

$$\angle A + \angle P < \angle B$$

$$\angle B < 90^\circ \text{ أى أن : } \Delta PAB \text{ منفرج الزاوية فى } B$$

تدريبات :

$$(1) \Delta PAB \text{ فيه : } \angle B = 45^\circ, \angle A = \angle P$$

$$\text{أوجد } \angle P$$

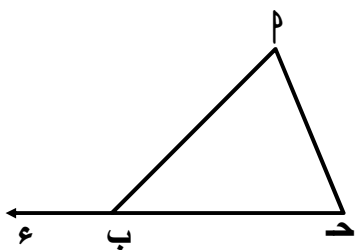
الحل

$$\angle B = 45^\circ, \angle A = \angle P$$

$$\angle B = 45^\circ$$

$$\angle A = \angle P$$

، (د د) = ٥٣ ° أوجد : (د ب ع)



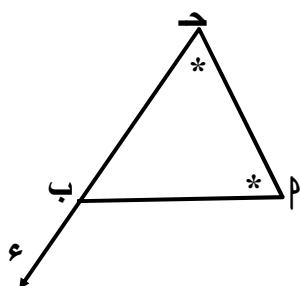
الح

$\Delta \vdash P$... $\Delta \vdash E$::

$$\dots = \dots = (\epsilon \vdash \supset) \cup \therefore$$

(٣) في الشكل المقابل : $\cup (P \supset Q) = \cup (H \supset Q)$

١٣٠ = (٤ ب ٢) ، (٢ ٢) أوجد : (٢ ٢)



الح

$\Delta \triangleright \mathcal{P} \vdash \mathcal{H}$ $\vdots$ $\Delta \triangleright \mathcal{P} \vdash \mathcal{H}$ $\therefore$

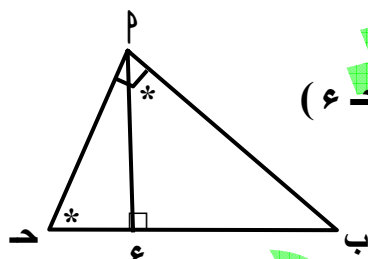
$$\dots = (p \supset q) \vee \dots$$

$$\dots = (\neg \neg) \psi \vdash (\neg \neg) \psi = (\bot \neg) \psi \vdash ,$$

(٤) في الشكل المقابل : Δ م ب ح قائم الزاوية في م

$$(e \mid \neg) \mathcal{V} = (e \mid \neg) \mathcal{V}, \quad \overline{b} \perp \overline{e \mid \neg},$$

برهن أن : $\mathcal{U}(\Delta \cup \{e\}) = \mathcal{U}(\Delta)$ (ب)



الحمد لله

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : $\Delta \text{ م ب ع } :: \Delta \text{ ح م ع } ، \Delta \text{ ح م ع } \text{ فيهما :}$

... = (٢١٣) ٧

$$\dots = (\neg \epsilon \mid \Delta) \cup,$$

$$(\triangleright \text{ ب }) \mathcal{U} = (\text{ع} \vdash \triangleright) \mathcal{U} \therefore$$

تمارين

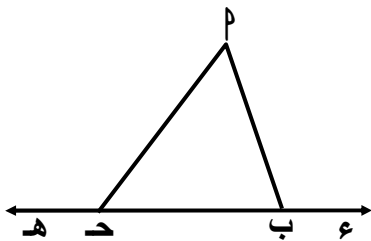
(١) $\triangle PAB$ فيه : $\angle B = 40^\circ$ ، $\angle A = 60^\circ$ أوجد $\angle P$ ()

(٢) $\triangle PAB$ منفرج الزاوية فيه قياسا زاويتين متساويتين فإذا كان : $\angle B = 110^\circ$

أوجد $\angle P$ ()

(٣) $\triangle PAB$ فيه : $\angle A = 50^\circ$ ، $\angle B = 70^\circ$ ()

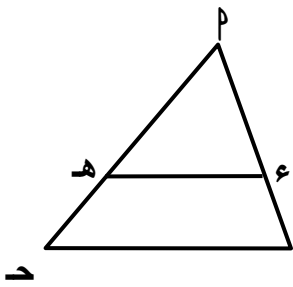
أوجد $\angle P$ ()



(٤) في الشكل المقابل : $\angle A = 50^\circ$

، $\angle HPA = 130^\circ$ أوجد بالبرهان :

$\angle BPA$ () ، $\angle B$ ()



(٥) في الشكل المقابل : $\angle A = 38^\circ$

، $\angle B = 76^\circ$ ، $\overline{HE} \parallel \overline{AB}$

أوجد بالبرهان : $\angle HPA$ ()

(٦) في الشكل المقابل : $\overline{HE} \parallel \overline{AB}$ ،

$\angle A = 35^\circ$ ، $\{P\} = \overline{HE} \cap \overline{AB}$

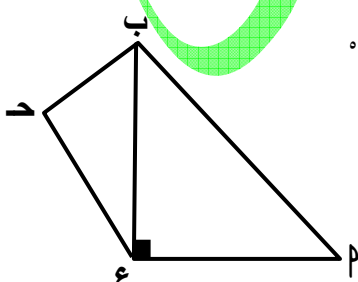
، $\angle BPA = 30^\circ$ أحسب :

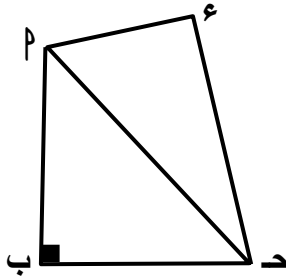
قياسات زوايا $\triangle PAB$

(٧) في الشكل المقابل : $\overline{HE} \parallel \overline{AB}$ ، $\angle A = 90^\circ$ ،

، $\angle B = 47^\circ$ ، $\angle BPA = 20^\circ$ ،

أوجد : $\angle A$ () ، $\angle B$ ()



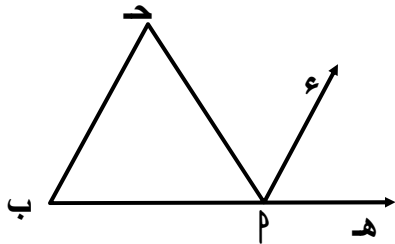


(٧) في الشكل المقابل : $\angle PBD = 90^\circ$ ،

$\angle PDC = 80^\circ$ ، $\angle PCD = 70^\circ$ ،

، $\angle PDB = 60^\circ$ أثبت أن :

$\overline{PD}$ ينصف $\angle BCD$

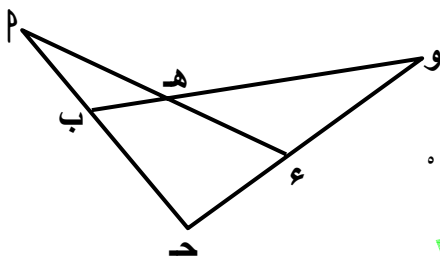


(٨) في الشكل المقابل : $\angle APC = 73^\circ$ ،

، $\angle BAP = 58^\circ$ ،

، $\angle PAB = 50^\circ$ أثبت أن :

$\overline{AP} \parallel \overline{BC}$

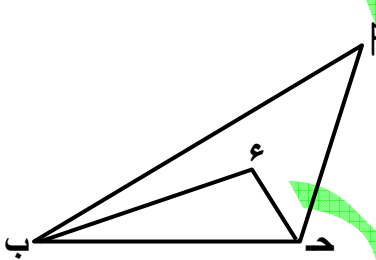


(٩) في الشكل المقابل : $\overline{PA} \supset \overline{PB}$ ، $\overline{PC} \supset \overline{PD}$ ،

$\angle AHP = 34^\circ$ ، $\{H\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ ،

، $\angle BHP = 24^\circ$ ، $\angle PAB = 100^\circ$ ،

أوجد : $\angle PCD$



(١٠) في الشكل المقابل : $\angle PAB = 30^\circ$ ،

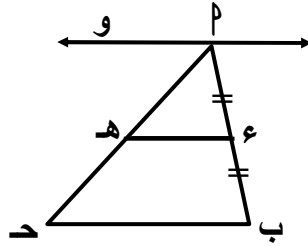
، $\overline{PE}$ ينصف $\angle BPC$ ،

، $\overline{CE}$ ينصف $\angle ACB$ ،

أوجد : $\angle PCE$

نظرية (٢) : الشعاع المرسوم من منتصف ضلع في مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين

ينصف الضلع الثالث



المعطيات : $\triangle ABC$ فيه E منتصف AC ، رسم $DE \parallel BC$

المطلوب : إثبات أن $DE = EC$

العمل : نرسم $DE \parallel BC$

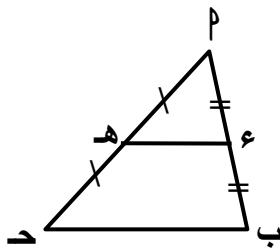
البرهان : $\because DE \parallel BC$ ، $DE \parallel BC$

$DE = EC$ ، قاطعين لهما ، $DE = EC$

وهو المطلوب

$\therefore DE = EC$

نتيجة : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث



في الشكل المقابل : إذا كان :

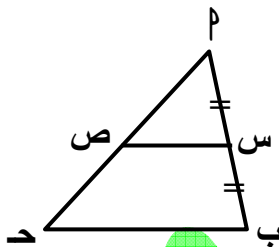
$\triangle ABC$ فيه E ، H منتصف AB ، $DE \parallel BC$

على الترتيب فإن : $DE \parallel BC$

تدريبات :

(١) في الشكل المقابل : S منتصف AB ، $CS \perp AB$

، $CS \parallel DE$ ، $CS = 6$ سم أوجد طول DE



الحل :

المعطيات :

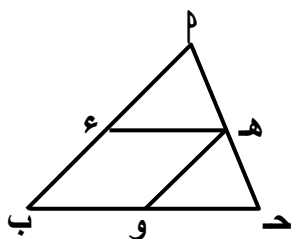
المطلوب :

البرهان : $\because \triangle ABC$ فيه S منتصف AB ، $CS \parallel DE$ ، $CS \parallel DE$

$\therefore CS$ منتصف DE

، $CS = 6$ سم

$\therefore DE = 2 \times CS = 2 \times 6 = 12$ سم



(٢) في الشكل المقابل : $\overline{EH}$ منتصف $\overline{PB}$ ، و $\overline{EH}$ منتصف $\overline{BC}$ ،
 أثبت أن $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ و $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ أضلاع

الحل :

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : $\therefore \overline{EH}$ منتصف $\overline{PB}$ ، $\therefore \overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ،

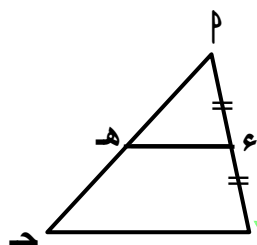
$\therefore \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

$\therefore \overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

$\therefore \overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

$\therefore \overline{EH} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ أضلاع

نظرية (٣) : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث
 وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع



المعطيات : ΔPBC فيه $\overline{EH}$ منتصف $\overline{PB}$ ، $\overline{EH}$ منتصف $\overline{BC}$ ،

المطلوب : إثبات أن : $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

العمل : نرسم $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ،

البرهان : $\therefore \overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\therefore \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

$\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ، قاطعين لهما ، $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

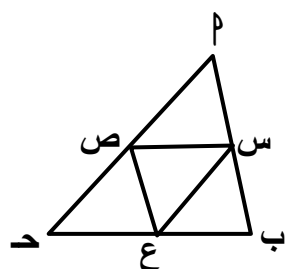
وهو المطلوب

$\therefore \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ،

تدريب : في الشكل المقابل ΔPBC فيه $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ، $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ،

$\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ، $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ،

أوجد محيط ΔPBC ،



الحل

المعطيات :

المطلوب :

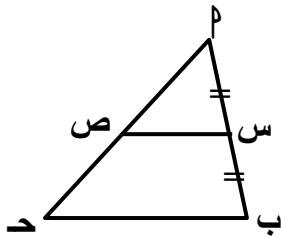
البرهان : $\therefore$ س منتصف ، ص منتصف $\therefore$ س ص = :

، بالمثل ص ع = ،

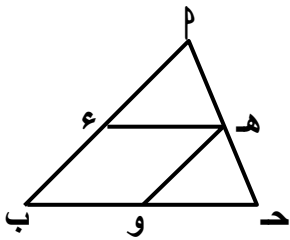
، بالمثل س ع = ،

 $\therefore$ محيط Δ س ص ع = :

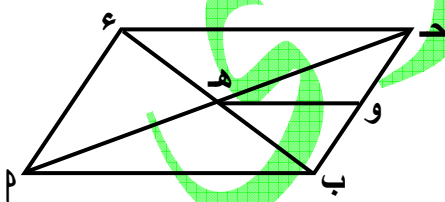
تمارين



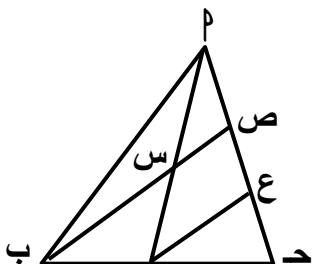
(١) في الشكل المقابل : س منتصف م ب ، ص $\supseteq$ م ح ،
 ، س ص // ب ح ، م ص = ن سم أوجد طول م ح



(٢) في الشكل المقابل : ع منتصف م ب ، ع ه // ب ح ،
 ، ه و // م ب أثبت أن : ب و = و ح

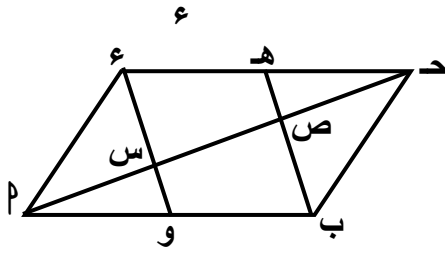


(٣) في الشكل المقابل : م ب ح ع متوازي أضلاع تقاطع
 قطراه في ه ، رسم ه و // م ب
 أثبت أن : ح و = و ب



(٤) في الشكل المقابل : ع منتصف م ب ، س منتصف م ع ،
 ، ع ع // ب ص ، م ح = ن سم
 م ص

أوجد : طول

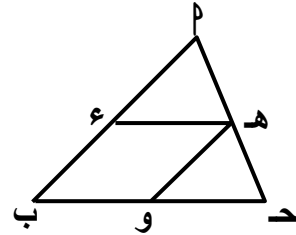


(٥) في الشكل المقابل : $AB \parallel CD$ متوازي أضلاع

، و ، ه منتصفى AB ، CD على الترتيب

أثبت أن : $EF \parallel AC$ متوازي أضلاع

، إذا كان : $EF = 6$ سم أوجد : طول AC



(٦) في الشكل المقابل : $\triangle ABC$ فيه $EF \parallel BC$ ، $EF = 6$ ،

و ، ه منتصفات AB ، AC ، BC على الترتيب

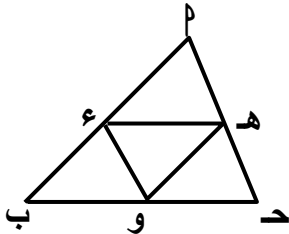
أثبت أن : $EF \parallel BC$ متوازي أضلاع

(٧) في الشكل المقابل : $\triangle ABC$ فيه $EF \parallel BC$ ، و ، ه منتصفات AB ، AC ، BC على الترتيب

، $EF = 6$ ، $BC = 12$ سم

و $EF = 6$ سم ، $BC = 12$ سم

أوجد : محيط $\triangle ABC$



(٨) في الشكل المقابل : $AB \parallel CD$ شبه منحرف فيه

$EF \parallel AC$ ، $EF = \frac{1}{2} AC$ ، و ، ه منتصفى

AB ، CD على الترتيب أثبت أن :

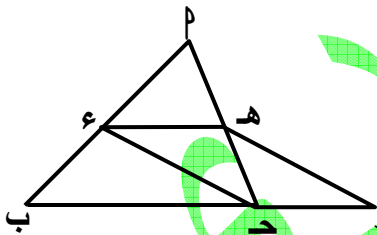
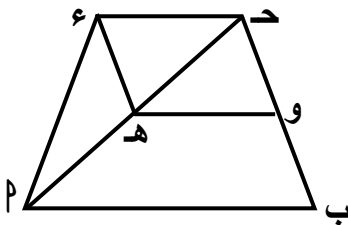
$EF \parallel AC$ متوازي أضلاع

(٨) في الشكل المقابل : $\triangle ABC$ فيه

، و ، ه منتصفى AB ، AC على الترتيب ،

و $EF \parallel BC$ بحيث $EF = \frac{1}{2} BC$ أثبت أن :

$EF \parallel BC$ متوازي أضلاع

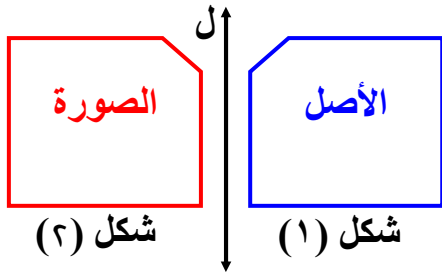


التحويلات الهندسية

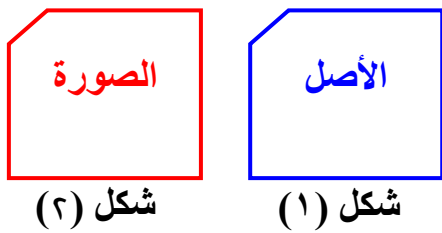
التحويلة الهندسية :

تحول كل نقطة في المستوى P إلى نقطة P' في نفس المستوى

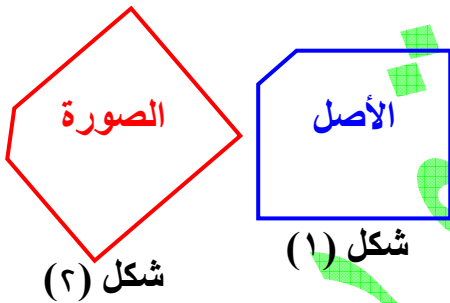
التحويلات الهندسية متعددة و من أمثلتها :



** في الشكل المقابل : نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " بوضع معكوس حول المستقيم L تسمى هذه التحويلة " انعكاس "



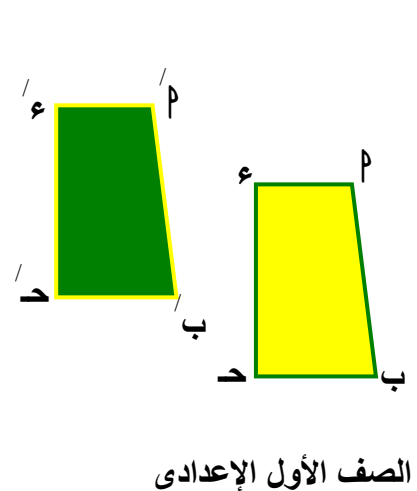
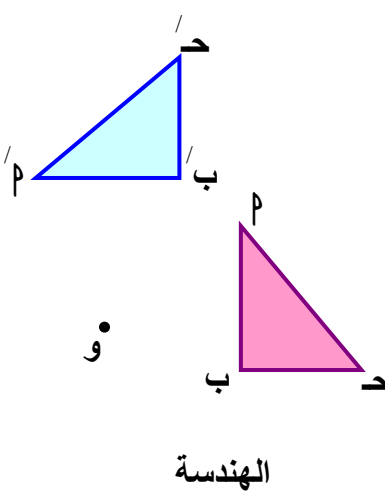
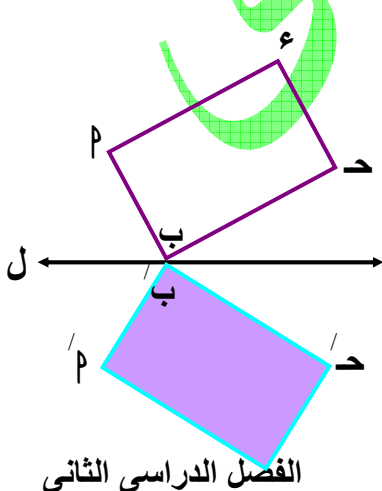
** في الشكل المقابل : نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن إنتقل من مكانه إلى مكان آخر تسمى هذه التحويلة " إنتقال "



** في الشكل المقابل : نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن دار حول نقطة ما تسمى هذه التحويلة " دوران "

تدريب (١) :

صف نوع التحويلة الهندسية " انعكاس - انتقال - دوران " في كل شكل مما يأتي :



تدريب (٢) : إرسم صورة Δ م ب ح حسب التحويلة :

$$(س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

$$\therefore (س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

$$\therefore م (٤، ٣) \leftarrow م (٤، -٣)$$

$$ب (١، ١) \leftarrow ب (١، -١)$$

$$ح (٤، ١) \leftarrow ح (٤، -١)$$

صف نوع التحويلة

تدريب (٣) : إرسم صورة Δ ع ه و حسب التحويلة :

$$(س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

$$\therefore (س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

$$\therefore ع (١، ١) \leftarrow ع (١، -١)$$

$$هـ (١، ٤) \leftarrow هـ (١، -٤)$$

$$و (٣، ٤) \leftarrow و (٣، -٤)$$

صف نوع التحويلة

تدريب (٤) : إرسم صورة Δ ع ه و حسب التحويلة :

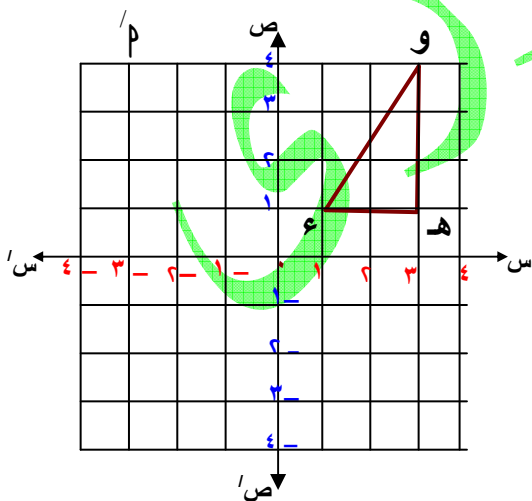
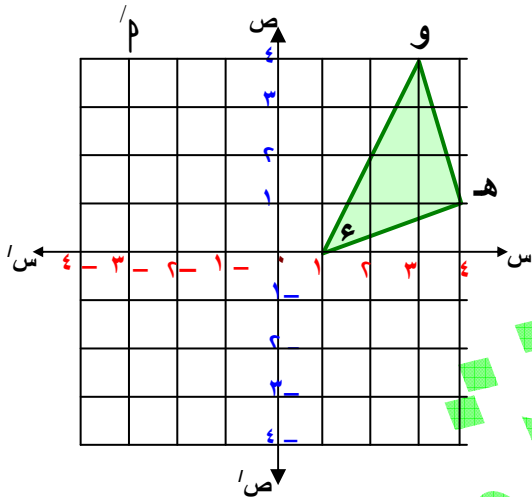
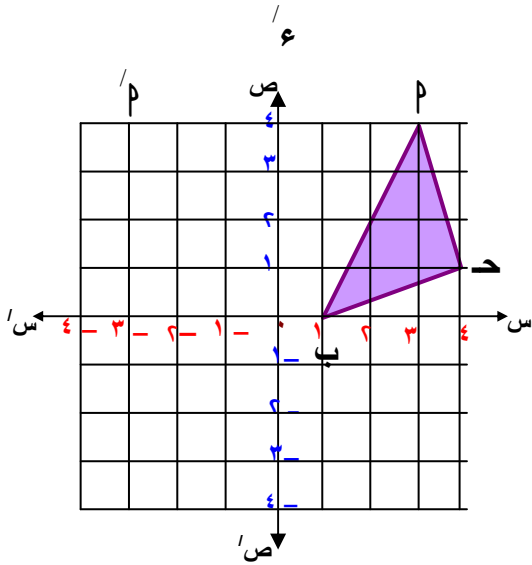
$$(س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

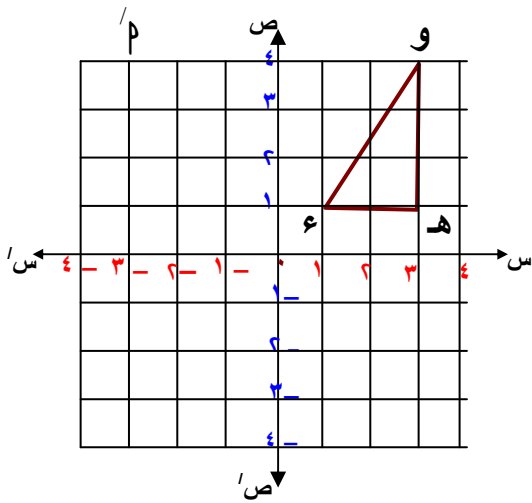
$$\therefore (س، ص) \leftarrow (س، -ص)$$

$$\therefore ع (١، ١) \leftarrow ع (١، -١)$$

$$هـ (٣، ١) \leftarrow هـ (٣، -١)$$

$$و (٣، ٤) \leftarrow و (٣، -٤)$$





تدريب (٤) : إرسم صورة Δ ع هـ و حسب التحويلة :

$$(س، ص) \leftarrow (س + ١، ص - ١)$$

$$\therefore (س، ص) \leftarrow (س + ١، ص - ١)$$

$$\therefore ع (١، ١) \leftarrow ع (٠، ٢)$$

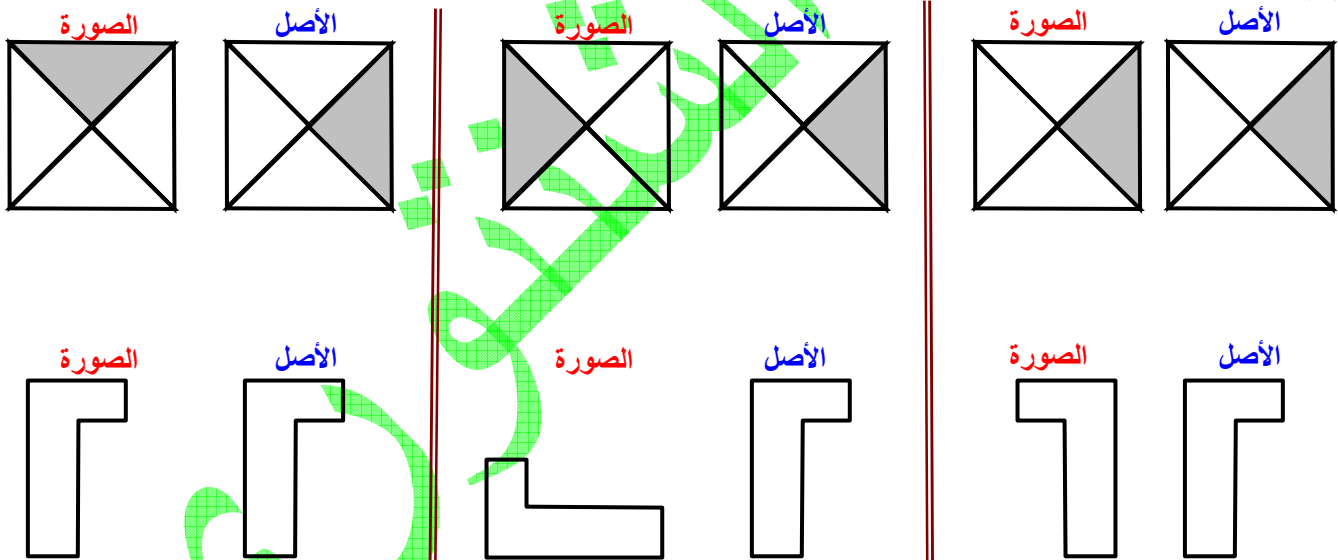
$$هـ (١، ٣) \leftarrow هـ (٠، ٤)$$

$$و (٤، ٣) \leftarrow و (٠، ٤)$$

صف نوع التحويلة

تمارين

(١) صف نوع التحويلة في كل شكل مما يأتي :



(٢) في مستوى إحداثي متعامد إرسم Δ م ب ح الذي فيه م = (١، ٠) ، ب = (٣، ٢)

، ح = (٤، ٢) ثم إرسم صورته في كل من الحالات الآتية واصفاً نوع التحويلة الهندسية

في كل حالة :

ثانياً : (س، ص) $\leftarrow$ (س - ١، ص)

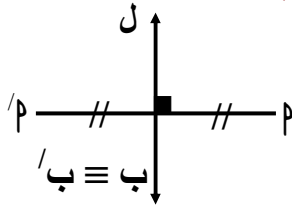
أولاً : (س، ص) $\leftarrow$ (س - ١، ص)

ثالثاً : (س ، ص) ← (س ، ص - ٣) رابعاً : (س ، ص) ← (س ، - ص)

الانعكاس

** الانعكاس فى مستقيم

الانعكاس فى المستقيم ل يحول كل نقطة P إلى P' ، ب إلى B' بحيث :



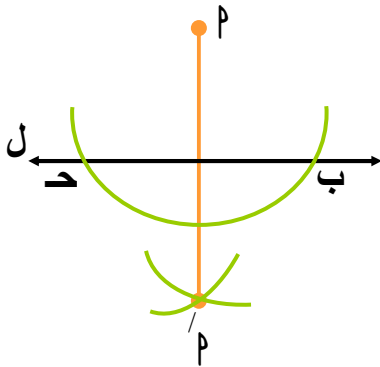
* إذا كانت $P \notin l$ فإن l هو العمود الذى ينصف PP'

* إذا كانت $B \in l$ فإن $B \equiv B'$

أى إذا كانت $B \in l$ فإن صورة B هى نفسها

** إيجاد صورة نقطة بالانعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد P' صورة P بالانعكاس فى المستقيم l نتبع الآتى :



(١) نفتح الفرجار فتحة مناسبة ونركز فى P ونرسم قوساً

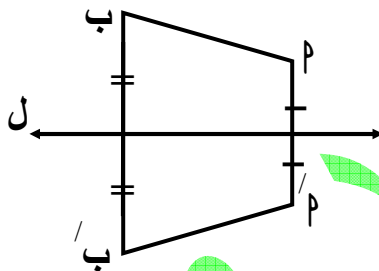
من دائرة يقطع المستقيم l فى النقطتين B ، C

(٢) بنفس الفتحة نركز فى B ثم C ونرسم قوسين يتقاطعان

فى P' فتكون P' هى صورة P بالانعكاس فى المستقيم l

** إيجاد صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد صورة $\overline{AB}$ بالانعكاس فى المستقيم l نتبع الآتى :



(١) نوجد P' صورة P بالانعكاس فى المستقيم l كما سبق

(٢) نوجد B' صورة B بالانعكاس فى المستقيم l كما سبق

(٣) نرسم $\overline{A'B'}$ فتكون هى صورة $\overline{AB}$ بالانعكاس فى المستقيم l

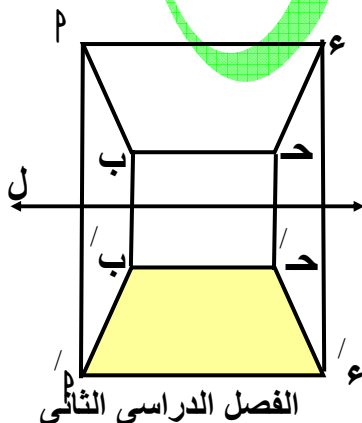
تحقق بالقياس أن : $AP = A'P'$ ، $BP = B'P'$

** إيجاد صورة مضلع بالانعكاس فى مستقيم معلوم

لإيجاد صورة المضلع ABC بالانعكاس فى المستقيم l نعين

النقط P ، B ، C ، E صور النقط A ، B ، C ، E على الترتيب

بالانعكاس فى المستقيم l كما سبق فيكون المضلع $P'B'C'E$



هو صورة المضلع m ب d ع بالإنعكاس في المستقيم l

ملاحظات : ** الصورة m' ب d' ع' تطابق الأصل m ب d ع

** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية : $m' = m$ ، $b' = b$ ، وهكذا

** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية : $\angle m' = \angle m$ ، $\angle b' = \angle b$ ،

وهكذا $\angle d' = \angle d$ ،

** الإنعكاس هو تحويل هندسية تحول الشكل الهندسي إلى شكل هندسي آخر مطابق له

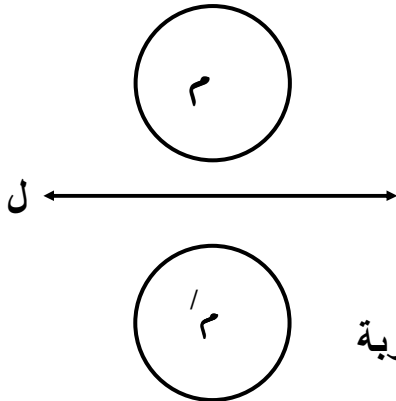
**** الإنعكاس لا يحافظ على الترتيب الدوراني لرؤوس الشكل**

لأن رؤوس المضلع m ب d ع تسير في عكس اتجاه عقارب الساعة

بينما رؤوس المضلع m' ب d' ع' تسير في اتجاه عقارب الساعة

**** إيجاد صورة دائرة بالإنعكاس في مستقيم معلوم**

لإيجاد صورة دائرة مركزها m بالإنعكاس في المستقيم l نتبع الآتي :

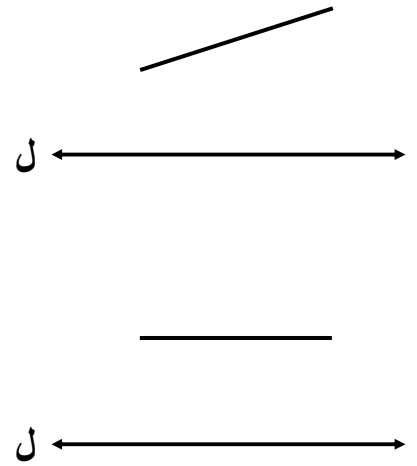
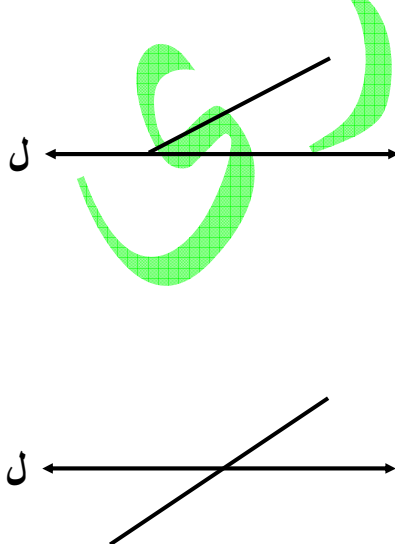


(١) نوجد m' صورة m بالإنعكاس في المستقيم l كما سبق

(٢) نفتح الفرجار فتحة طولها يساوي طول نصف قطر الدائرة

المعلومة ثم نركز في m' ونرسم دائرة تكون هي الصورة المطلوبة

تدريب (١) : باستخدام الأدوات الهندسية أوجد صورة m ب بالإنعكاس في المستقيم l ماذا تلاحظ ؟

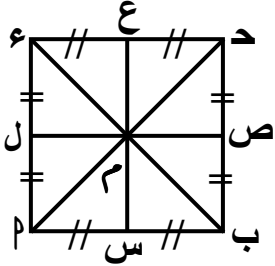


تدريب (٢) : إرسم Δ P ب D الذى فيه $P = B = 3$ سم

، ب $D = 5$ سم ، $P = D = 7$ سم ثم أوجد

صورته بالانعكاس فى $P \rightarrow D$

تدريب (٣) : فى الشكل المقابل :



P ب D مربع ، S ، V ، E ، L منتصفات أضلاعه P ب

، B ، D ، E ، P على الترتيب ، M منتصف قطريه أكمل :

(١) صورة ΔPMS بالانعكاس فى $S \rightarrow E$ هى

، $S = M$ ، لأن الانعكاس يحافظ على

، $(PMS) = (SMP)$ ، لأن الانعكاس يحافظ على

(٢) المربع D V M E هو صورة المربع بالانعكاس فى $S \rightarrow E$

(٣) المستطيل D E L V صورة المستطيل P L V بالانعكاس فى

، النقطة E صورة النقطة لأن الانعكاس يحافظ على

تمارين

(١) إرسم Δ S V E القائم الزاوية فى V ، فيه $S = 3$ سم ، $V = 4$ سم ثم

أوجد صورته بالانعكاس فى $S \rightarrow V$

(٢) إرسم المستطيل P ب D E الذى فيه ب $D = 6$ سم ، $D = E = 4$ سم ثم أوجد صورته

بالانعكاس فى $P \rightarrow D$

(٣) إرسم المربع P ب D E الذى طول ضلعه ٥ سم ثم أوجد صورته بالانعكاس فى $P \rightarrow E$

(٤) إرسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ثم إرسم صورتها بالانعكاس فى المستقيم L الذى

يبعد عن مركزها ٥ سم ، ثم أوجد صورة هذه الدائرة فى مستقيم يمر بمركزها

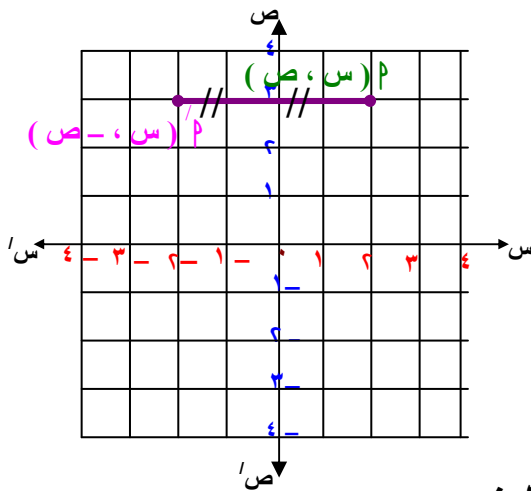
(٥) إرسم Δ P ب D المتساوى الأضلاع حيث طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته بالانعكاس

$P \rightarrow B$

فى ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

الإنعكاس فى المستوى الإحداثى

الإنعكاس فى محور الصادات :



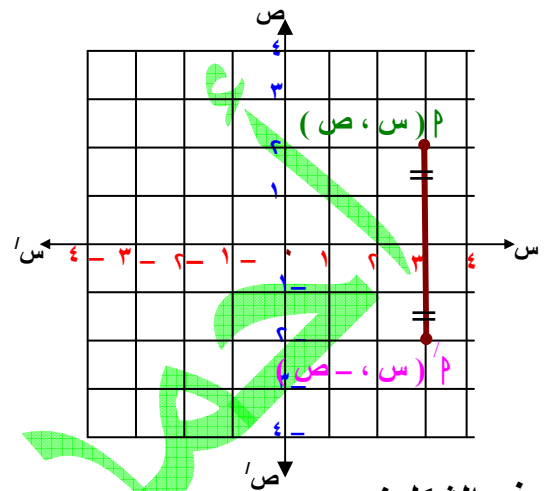
فى الشكل نجد :

$$P(2, 3) \leftarrow P'(2, -3)$$

أى أن : الإنعكاس فى محور الصادات
يغير إشارة المسقط الأول " السينى "

$$P(س, ص) \xrightarrow{\text{إنعكاس فى محور الصادات}} P'(س, -ص)$$

الإنعكاس فى محور السينات :



فى الشكل نجد :

$$P(2, 3) \leftarrow P'(-2, 3)$$

أى أن : الإنعكاس فى محور السينات
يغير إشارة المسقط الثانى " الصادى "

$$P(س, ص) \xrightarrow{\text{إنعكاس فى محور السينات}} P'(-س, ص)$$

ملاحظات :

** صورة النقطة (س, ٠) بالإنعكاس فى محور السينات هى نفسها لأنها تقع على محور السينات

فمثلاً : صورة النقطة (٠, ٣) بالإنعكاس فى محور السينات هى (٠, ٣)

** صورة النقطة (٠, ص) بالإنعكاس فى محور الصادات هى نفسها لأنها تقع على محور الصادات

فمثلاً : صورة النقطة (٤, ٠) بالإنعكاس فى محور الصادات هى (٤, ٠)

** صورة النقطة (٠, ٠) بالإنعكاس فى محور السينات و بالإنعكاس فى محور الصادات

لأنها تقع على المحور

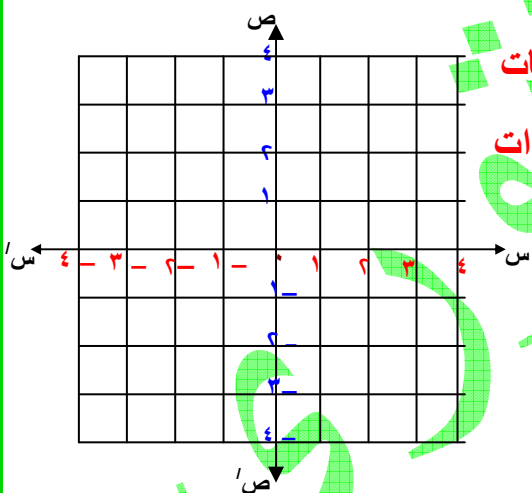
تدريب (١) : أكمل الجدول التالي :

صورة النقطة بالانعكاس في محور		النقطة
الصادات	السينات	
(٣ ، ١ -)	(٣ - ، ١)	(٣ ، ١)
		(٥ ، ٢ -)
	(٤ ، ٠)	
(٠ ، ١)		
	(٣ ، ٣ -)	
		(٤ - ، ٦)
(٤ ، ٣)		

تدريب (٢) : في مستوى إحداثي متعامد يرسم المثلث P ب $د$ حيث $P = (٣ ، ٤)$ ، $ب = (١ ، ٣)$ ، $د = (٤ ، ١)$ ثم أوجد :

(١) صورة المثلث P ب $د$ بالانعكاس في محور السينات(٢) صورة المثلث P ب $د$ بالانعكاس في محور الصاداتالحل

(١) بالانعكاس في محور السينات :

صورة $P = (٣ ، ٤)$ هيصورة $ب = (١ ، ٤)$ هيصورة $د = (٣ ، ١)$ هي∴ صورة المثلث P ب $د$ بالانعكاس في محور السينات هي(٢) بالانعكاس في محور الصادات : صورة $P = (٣ ، ٤)$ هيصورة $ب = (١ ، ٤)$ هي صورة $د = (٣ ، ١)$ هي

∴ صورة المثلث $\triangle P$ ب د بالإنعكاس في محور الصادات هي ٠٠٠٠

تمارين

(١) أوجد صور النقاط الآتية بالإنعكاس في :

**** محور السينات** **** محور الصادات**

$$P = (3, 4), B = (0, 3), D = (6, 0), E = (2, 1), H = (-3, -2)$$

(٢) ارسم $\triangle P$ ب حيث $P = (3, 4), B = (2, 1)$ ثم ارسم صورتها بالإنعكاس في :

**** محور السينات** **** محور الصادات**

(٣) في نظام إحداثي متعامد ارسم $\triangle$ و ب د حيث و نقطة الأصل ، ب = (٠ ، ٣) ، د = (٤ ، ٣)

ثم ارسم صورته بالإنعكاس في محور السينات ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٤) على شبكة التربيعية المتعامدة ارسم $\triangle P$ ب د حيث $P = (2, 1), B = (1, 4)$

، د = (٤ ، ٣) ثم ارسم صورته بالإنعكاس في محور السينات

(٥) في نظام إحداثي متعامد ارسم المربع P ب د ع حيث $P = (1, 1), B = (2, 4), E = (2, 4)$

، د = (٥ ، ٣) ، ع = (٤ ، ٠) ثم أوجد صورته بالإنعكاس في محور الصادات

(٦) $\triangle P$ ب د ع معين فيه $P = (2, -2), B = (-1, -1), E = (1, 1)$ عين من الرسم

إحداثي نقطة د ثم أوجد صورة المعين بالإنعكاس في محور السينات

(٧) في نظام إحداثي متعامد ارسم المستطيل P ب د ع حيث $P = (2, 3), B = (2, 8), E = (2, 8)$

، د = (٦ ، ٨) ، ع = (٦ ، ٣) ثم أوجد صورته بالإنعكاس في محور الصادات

(٨) في نظام إحداثي متعامد ارسم المربع P ب د ع حيث $P = (1, 1), B = (3, 1), E = (3, 1)$

، د = (٣ ، ٣) ، ع = (٤ ، ٠) عين من الرسم إحداثي نقطة ع ثم أوجد صورة المعين

بالإنعكاس في محور السينات

(٩) في نظام إحداثي متعامد ارسم المربع P ب د ع حيث $P = (3, 2), B = (1, -2), E = (1, -2)$

ثم أوجد صورته بالإنعكاس في محور الصادات ، ماذا تلاحظ ؟

(١٠) في نظام إحداثي متعامد ارسم المربع P ب د ع حيث $P = (2, 0), B = (0, -5), E = (0, -5)$

، $د = (٣ - ، ٥)$ ، $ع = (٣ - ، ٢)$ أوجد صورته بالإنعكاس في محور الصادات

ثم أوجد طول ضلعه ، مساحته

(١١) في نظام إحداثي متعامد إرسم المستطيل $م ب د ع$ حيث $م = (٢ ، ٢)$ ، $ب = (٣ ، ٢)$

، عرضه يساوي ٣ وحدات طول بالإنعكاس في محور السينات كم حالة يمكن رسمها ؟

(١٢) إذا كانت $م \not\subseteq$ لمستقيم $ل$ ، $ب \in$ للمستقيم $ل$ ، وكانت $م'$ صورة $م$ بالإنعكاس في

المستقيم $ل$ ، وكان $م = ب = ٢$ وحدة طول ، $م' = ب + ٣$ وحدة طول أوجد طول $م ب$

(١٣) إذا كانت النقطة $ب$ صورة النقطة $د$ بالإنعكاس في محور السينات ، وكانت $د$ صورة $هـ$

بالإنعكاس في محور الصادات حيث $هـ = (٣ ، ٢)$ أوجد إحداثي النقطة $ب$

(١٤) عين على شبكة تربيعية النقط :

$م = (٤ ، ٥)$ ، $ب = (١ ، ٥)$ ، $د = (١ ، ٢)$ ، $م' = (٥ ، ٤)$ ، $ب' = (٥ ، ١)$

، $د' = (٢ ، ١)$

أولاً : إذا كان $\Delta م ب د'$ صورة $\Delta م ب د$ بالإنعكاس في المستقيم $ل$ إرسم هذا المستقيم

ثانياً : إذا كان الشكل $م ب ب'$ صورة الشكل $د ب ب'$ بالإنعكاس في المستقيم $م$ إرسم هذا

المستقيم

(١٥) في الشكل المقابل : $\Delta م ب د$ متساوي الأضلاع فيه

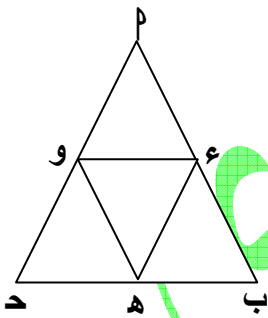
، $ع$ ، $هـ$ ، ومنتصفات $م ب$ ، $ب د$ ، $د م$ على الترتيب أكمل ما يأتي :

(١) $م ب$ هي صورة $م د$ بالإنعكاس في

(٢) صورة $د هـ$ بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{هـ و}$ هي

(٣) $\Delta م ب د$ صورة $\Delta م ب د$ بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{هـ و}$

(٤) صورة $\Delta ب ع هـ$ بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{هـ و}$ هي

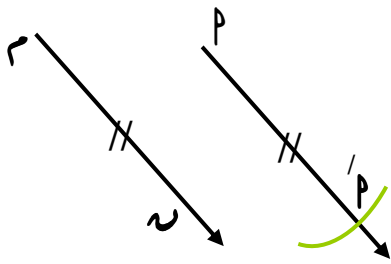


الانتقال

* الانتقال هو تحويل هندسى يحول (يزيح) كل نقطة P فى المستوى إلى نقطة P' فى نفس المستوى مسافة ثابتة فى اتجاه معين

* لتحديد الانتقال يلزم معرفة : (١) اتجاه الانتقال (٢) مسافة الانتقال

** إيجاد صورة نقطة بانتقال معلوم



لإيجاد P' صورة P بانتقال m فى اتجاه n نتبع الآتى :

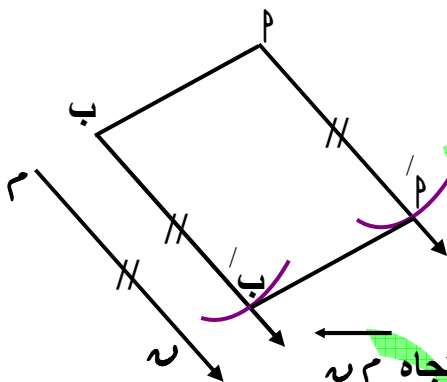
(١) نرسم من P شعاعاً يوازي n وفى نفس اتجاهه

(٢) نفتح الفرجار فتحة طولها يساوى m ونركز فى P

ونرسم قوساً يقطع الشعاع المرسوم من P فى P' " $P'P = m$ ، $P'P \parallel n$ "

فتكون P' صورة P بانتقال m فى اتجاه n

** إيجاد صورة قطعة مستقيمة بانتقال معلوم



لإيجاد صورة AB بانتقال m فى اتجاه n نتبع الآتى :

(١) نوجد P' صورة P بالانتقال المعلوم كما سبق

(٢) نوجد B' صورة B بالانتقال المعلوم كما سبق

(٣) نرسم $\overline{A'B'}$ فتكون هى صورة AB بانتقال m فى اتجاه n

تحقق من أن : $P'B' = P'B$ ، $P'B' \parallel P'B$

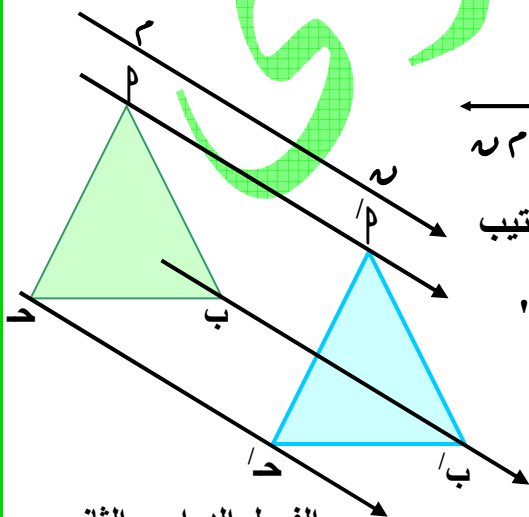
** إيجاد صورة مضلع بانتقال معلوم

لإيجاد صورة مضلع $\triangle PAB$ بانتقال m فى اتجاه n

نعين: النقط P' ، B' ، A' صور النقط P ، B ، A على الترتيب

بالانتقال المعلوم كما سبق فيكون المضلع $\triangle P'A'B'$

هو صورة المضلع $\triangle PAB$ بالانتقال المعلوم



ملاحظات : ** الصورة $\triangle م' ب' د'$ تطابق الأصل $\triangle م ب د$

** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية : $م' ب' = م ب$ ، $ب' د' = ب د$ ، وهكذا

** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية : $\angle م' ب' د' = \angle م ب د$ ،

، $\angle م' د' ب' = \angle م د ب$ ، وهكذا

** الإنتقال هو تحويل هندسية تحول الشكل الهندسي إلى شكل هندسي آخر مطابق له

** الإنتقال يحافظ على الترتيب الدوراني لرؤوس الشكل

لأن رؤوس المضلع " $\triangle م ب د$ " تسير في اتجاه عقارب الساعة

و أيضاً رؤوس المضلع " $\triangle م' ب' د'$ " تسير في اتجاه عقارب الساعة

تدريب (١) :

إرسم $\triangle م ب د$ القائم الزاوية في $م$ ، الذي فيه

$م د = ٣$ سم ، $م ب = ٤$ سم ثم إرسم صورته

بإنتقال مسافة ٤ سم في اتجاه $ب م$ ماذا تلاحظ ؟

تدريب (٢) :

في الشكل المقابل : $\triangle م ب د$ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم

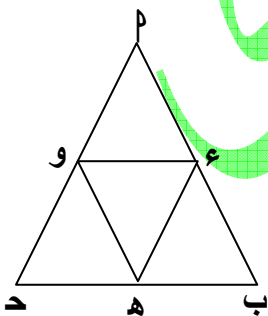
، $هـ$ ، $و$ ، ومنتصفات $م ب$ ، $ب د$ ، $د م$ على الترتيب أكمل ما يأتي :

(٣) صورة $\triangle ب هـ و$ بإنتقال مسافة ٢ سم في اتجاه $ب هـ$

هي ، $هـ و = و هـ$ لأن الإنتقال يحافظ على

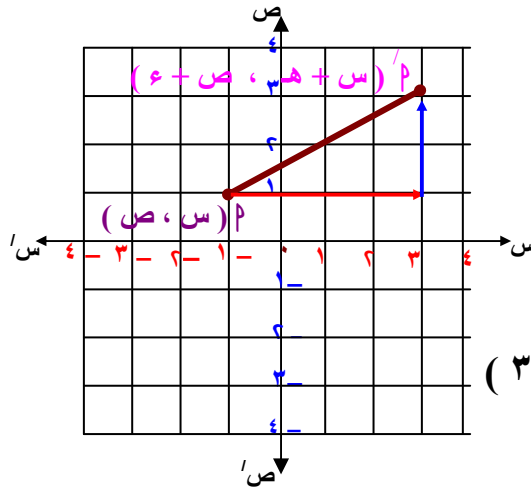
(٢) $\triangle ب هـ و$ صورة $\triangle هـ و د$ بإنتقال مسافة سم

في اتجاه



(٣) Δ صورة Δ و Δ و Δ بانتقال مسافة ٢ سم في اتجاه Δ هـ

الانتقال في المستوى الإحداثي



الانتقال في المستوى الإحداثي يحول كل نقطة إزاحة سينية هـ

يتبعها إزاحة صادية عـ بحيث :

$$P' (س، ص) \leftarrow P (س + هـ، ص + ع)$$

فمثلاً : صورة النقطة $P (١، ١ -)$ بانتقال

$$(س، ص) \leftarrow (س + ع، ص + هـ) \text{ هي النقطة } P' (٣، ٣)$$

$$P' (٣، ٣) = P (١ -، ٤ +) \text{ لأن : } P' (٣، ٣) = (١ - + ٤، ٤ + ١)$$

ملاحظة :

الانتقال مسافة P ب في اتجاه P حيث $P (١، ٢)$ مثلاً ، ب $(٦، ٥)$ مثلاً يكافئ :

إزاحة سينية " أفقية " من ٢ إلى ٥ تساوي ٣ " ٣ = ٥ - ٢ "

إزاحة صادية " راسية " من ١ إلى ٦ تساوي ٥ " ٥ = ٦ - ١ "

، يكون الانتقال هو : $(س، ص) \leftarrow (س + ٣، ص + ٥)$

، تكون صورة $P (١ -، ٤)$ بهذا الانتقال هي : $(٥ + ٤، ٣ + ١ -) = (٩، ٢)$

تدريب (١) : أكمل الجدول التالي :

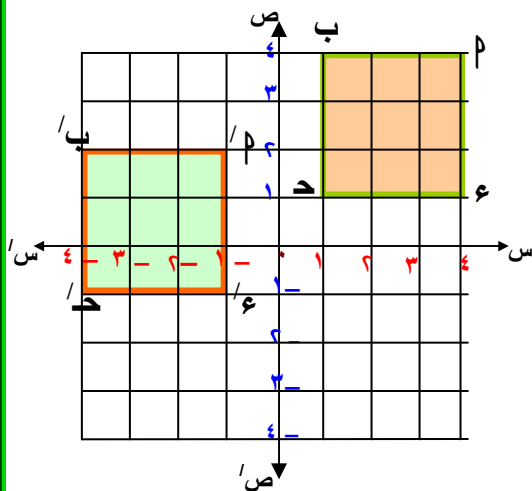
النقطة	(٣، ٤)	(٣ -، ٤)	(٥ -، ١)
صورة النقطة بالانتقال	$(س، ص) \leftarrow (س + ١، ص - ٢)$		
	$(س، ص) \leftarrow (س + ١، ص - ٢)$		
	$(س، ص) \leftarrow$		(٥، ١ -)

تدريب (٢):

فى مستوى إحداثى متعامد إرسم المربع P ب $د$ حيث $(٤, ٤) = P$ ، $(٤, ١) = ب$ ،

$د = (١, ١)$ ، $ع = (١, ٤)$ ثم أوجد : صورة المربع P ب $د$ ع بالانتقال

$$(س, ص) \leftarrow (س - ٥, ص - ٢)$$



الحل

صورة P هى $P' = (٢ - ٤, ٥ - ٤) = (٢, ١)$

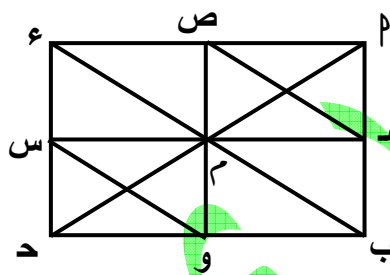
صورة $ب$ هى $ب' = (٢ - ٤, ٥ - ٤) = (٢, ١)$

صورة $د$ هى $د' = (٢ - ٤, ٥ - ٤) = (٢, ١)$

صورة $ع$ هى $ع' = (٢ - ٤, ٥ - ٤) = (٢, ١)$

تمارين

(١) فى الشكل المقابل : P ب $د$ ع مستطيل تقاطع قطراه فى $م$



هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه أكمل ما يأتى :

١ - صورة P هـ بالانتقال P هـ فى اتجاه P هـ هى $.....$

٢ - صورة ΔP هـ ص بالانتقال P ص فى اتجاه P ص هى $.....$

٣ - $\Delta م س ع$ صورة $\Delta م و$ بالانتقال $م و$ فى اتجاه $م و$ هى $.....$

٤ - المستطيل و $د س م$ صورة المستطيل هـ $م ص$ بالانتقال مسافة $.....$ فى اتجاه $.....$

(٢) إرسم P ب طولها ٤ سم ثم إرسم صورتها بالانتقال مسافة ٣ سم فى اتجاه P ب

(٣) إرسم ΔP ب $د$ قائمة الزاوية فى $ب$ فيه $ب = ٤$ سم ، $ب د = ٣$ سم ثم إرسم صورته

بانتقال مسافة ٣ سم في اتجاه

(٤) إرسم Δ ب د المتساوي الأضلاع و الذي طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته بانتقال قدره ٤ سم في اتجاه ب د ←

(٥) إرسم المربع ب د ع طول ضلعه ٣ وحدة طول ثم إرسم صورته بالانتقال ب د في اتجاه ب د ← ، وإذا وصلت كل نقطة بصورتها فأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٦) في نظام إحداثي متعامد إرسم المربع ب د ع حيث $(١, ١) = ب$ ، $(٢, ٤) = ب$

، $(٥, ٣) = د$ ، $(٤, ٠) = ع$ ثم أوجد صورته :

١ - بالانتقال $(س, ص) \leftarrow (س - ١, ص + ١)$

٢ - بالانتقال ب د في اتجاه ب د ← مبيناً قاعدة هذا الانتقال

(٧) إرسم Δ و ب د حيث و نقطة الأصل ، ب $(١ - , ٢)$ ، د $(٢, ١)$ ثم إرسم صورته

بالانتقال $(س, ص) \leftarrow (س - ١, ص + ٢)$

(٨) النقطة ب' $(٣ - , ٣)$ هي صورة النقطة ب بالانتقال قاعدته $(س, ص) \leftarrow (س - ١, ص - ٤)$

إرسم النقطتين ب' ، ب على الشبكة التربيعية و بنفس الانتقال أوجد صورة Δ ب د حيث

ب $(٠, ٥)$ ، د $(٢ - , ١)$

(٩) إذا كانت ب $(٣ - , ٢)$ ، ب $(١, ٠)$ ، د $(٢ - , ٣)$ فأوجد :

١ - الانتقال الذي يجعل ب صورة ب

٢ - الانتقال الذي يجعل د صورة ب

٣ - الانتقال الذي يجعل د صورة ب

٤ - الانتقال الذي يجعل ب صورة د

(١٠) إذا كانت د $(١ - , ٣)$ هي صورة ب بالانعكاس في محور الصادات ، ب هي صورة ب

بالانعكاس في محور السينات فأوجد الانتقال الذي يجعل ب صورة د

الدوران

الدوران في المستوى هو تحويل هندسية تدور الشكل حول نقطة بزاوية معينة

* لإيجاد صورة نقطة بدوران معين يجب معرفة العناصر :

(١) مركز الدوران (٢) قياس زاوية الدوران " هـ " (٣) إتجاه الدوران

ملاحظات :

(١) الدوران يتحدد تماماً عند تحديد مركز الدوران ، قياس زاويته ، إتجاه الدوران

(٢) قياس زاوية الدوران يكون موجباً إذا كان الدوران ضد إتجاه عقارب الساعة

، ويكون سالباً إذا كان الدوران مع إتجاه عقارب الساعة

** إيجاد صورة نقطة بدوران معلوم

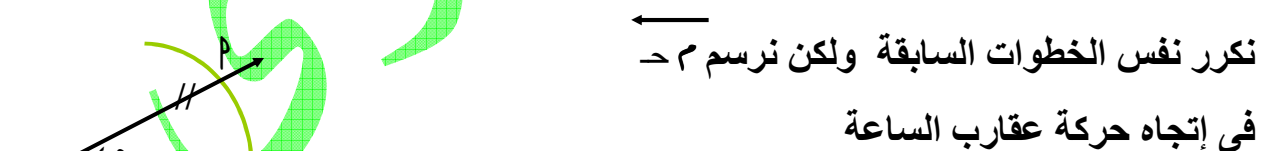
١ - لإيجاد P' صورة P بالدوران حول نقطة M بزاوية قياسها 45° نتبع الآتي :



(٣) نرسم بسن الفرجار عند M وبفتحة طولها MP نرسم قوساً يقطع MP في P'

فتكون P' هي صورة P بالدوران المطلوب

٢ - لإيجاد P' صورة P بالدوران حول نقطة M بزاوية قياسها 45° نتبع الآتي :



ملاحظة :

إذا كانت P' هي صورة P بدوران حول M بزاوية قياسها (H°)

فإن P هي صورة P' بدوران حول M بزاوية قياسها $(-H^\circ)$

* إيجاد صورة قطعة مستقيمة بدوران معلوم

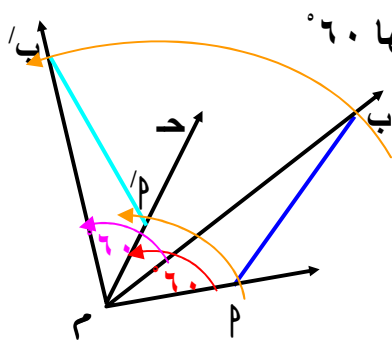
لإيجاد صورة $\overline{P}$ بدوران معلوم نتبع الآتي :

(١) نوجد P' صورة P بالدوران المعلوم كما سبق

(٢) نوجد P'' صورة P' بالدوران المعلوم كما سبق

(٣) نرسم $\overline{P''P'}$ فتكون هي صورة $\overline{P}$ بالدوران المعلوم تحقق من أن : $P'P'' = P'P$

مثال :



في الشكل المقابل : أوجد صورة $\overline{P}$ بالدوران حول M بزاوية قياسها 60°

الحل :

** نرسم الشعاع $\overline{MP}$ ونركز بمركز المنقلة على M بحيث يشير

$\overline{MP}$ إلى الرقم صفر في المنقلة ثم نرسم $\overline{MP'}$ بحيث :

$$\angle PMP' = 60^\circ$$

** نركز بسن الفرجار عند M وبفتحة طولها MP نرسم قوساً يقطع $\overline{MP'}$ في نقطة ولتكن P'

فتكون P' هي صورة P بالدوران حول M بزاوية قياسها 60°

** بالمثل نتبع نفس الخطوات لإيجاد P'' صورة P'

** نرسم $\overline{P''P'}$ فتكون هي صورة $\overline{P}$ بالدوران المطلوب

* إيجاد صورة قطعة مستقيمة بدوران معلوم

لإيجاد صورة مضلع معلوم بدوران معلوم نوجد صورة كل رأس من رؤوس المضلع بالدوران المطلوب ثم نصل بين صور الرؤوس المتتالية فنحصل على الصورة المطلوبة ونلاحظ :

** أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية

** المضلع الأصلي وصورته متطابقان

** قياسات الزوايا المتناظرة متساوية

** الإنتقال هو تحويل هندسية تحول الشكل الهندسي إلى شكل هندسي آخر مطابق له

** الإنتقال يحافظ على الترتيب الدوراني لرؤوس الشكل

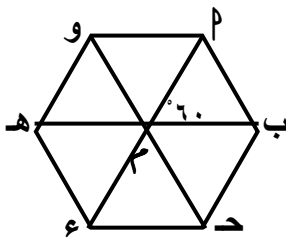
لأن رؤوس المضلع وصورته تسير في اتجاه عقارب الساعة

تدريب (١) :

إرسم $\triangle م ب ح$ القائم الزاوية في ب ثم أوجد صورته بالدوران حول ب بزاوية قياسها 90°

تدريب (٢) :

في الشكل المقابل $م ب ح د ه و$ سداسي منتظم مركزه م أكمل ما يأتي :



(١) صورة النقطة ب بالدوران حول م بزاوية قياسها 180°

هي

(٢) صورة $\overline{م ب}$ بالدوران حول م بزاوية قياسها (-60°)

هي

(٣) $\triangle م ه د$ صورة $\triangle م ب ح$ بالدوران حول م بزاوية قياسها (-120°)

(٤) الدوران الذي يحول $\triangle م ب ح$ إلى $\triangle م ه د$ هو

(٥) صورة $\triangle م ب ح$ بالدوران حول م بزاوية قياسها 60°

هي

(٦) صورة $\triangle م ح د$ بالدوران حول م بزاوية قياسها 120°

هي

الدوران فى المستوى الإحداثى

الدوران حول نقطة الأصل (و) :

- (١) بزاوية قياسها 90° يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (- ص ، س)
 - (٢) بزاوية قياسها $180^\circ \pm$ يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (- س ، - ص)
 - (٣) بزاوية قياسها 270° أو 90° يحول النقطة (س ، ص) إلى النقطة (ص ، - س)
 - (٤) بزاوية قياسها 180° يكافئ إنعكاس فى محور السينات متبوعاً بإنعكاس فى محور الصادات
 - (٥) بزاوية قياسها 180° أو 180° (يسمى دوران نصف دورة) " وهما متكافئان "
- و يكافئان إنعكاس فى نقطة الأصل
- (٦) بزاوية قياسها 360° أو 360° يسمى دوران محايد لأنه يحول الشكل إلى وضعه الأصلي
- ، وتكون صورة كل نقطة منطبقة على النقطة نفسها
- (٧) بزاوية قياسها 270° - يكافئ الدوران بزاوية قياسها 90°

تدريب (١) :

أكمل الجدول التالى :

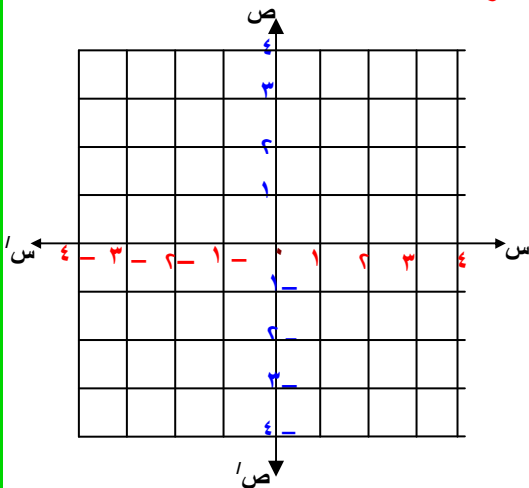
صورة النقطة بالدوران حول نقطة الأصل (و)					النقطة
$90^\circ -$	360°	270°	180° ؛ 180°	90° ؛ 270°	
(٤ - ، ٣)	(٤ ، ٣)	(٤ - ، ٣)	(٤ - ، ٣ -)	(٣ ، ٤ -)	(٤ ، ٣)
				(٥ - ، ١)	
			(٣ ، ٢ -)		
		(١ - ، ٣ -)			
	(٤ ، ٠)				

(٢ ، ٤)

تدريب (٢) :

: في مستوى إحداثي متعامد إرسم Δ م ب د حيث $(٠ ، ١) = م$ ، $(٣ ، ٢) = ب$ ،، $(٢ ، ٤) = د$ ، ثم أوجد : صورة Δ م ب د بالدوران حول نقطة الأصل :بزاوية قياسها ٩٠° ، بزاوية قياسها ١٨٠°

الحل

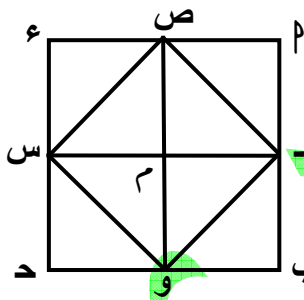


تمارين

(١) في الشكل المقابل :

م ب د ع مربع ، هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه

أكمل ما يأتي :



- ١ - صورة Δ م هـ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٤٥° هي ب
- ٢ - صورة Δ م هـ ص بالدوران حول م بزاوية قياسها ٩٠° هي ب
- ٣ - Δ م س ص صورة Δ بالدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠°
- ٤ - المربع و د س م صورة المربع هـ م ص م بالدوران حول بزاوية قياسها
.....

(٢) إرسم م ب طولها ٣ سم ثم أوجد صورتها :

١ - بالدوران حول P بزاوية قياسها 60°

٢ - بالدوران حول B بزاوية قياسها 150°

(٣) إرسم ΔPAB المتساوي الأضلاع وطول ضلعه 4 سم ثم أوجد صورته :

١ - بالدوران حول P بزاوية قياسها 60°

٢ - بالدوران حول B بزاوية قياسها 120°

(٤) إرسم ΔPAB الذى فيه $PB = 3$ سم ، $AB = 4$ سم ، $PA = 5$ سم ثم أوجد صورته :

١ - بالدوران حول P بزاوية قياسها 90°

٢ - بالدوران حول B بزاوية قياسها 60°

٣ - بالدوران حول C بزاوية قياسها 120°

(٥) على شبكة التربيعية المتعامدة إرسم ΔPAB حيث $P = (1, 2)$ ، $B = (4, 1)$

، $C = (3, 4)$ ثم إرسم صورته بالدوران حول نقطة الأصل :

** بزاوية قياسها 90° ** بزاوية قياسها 180°

(٦) فى نظام إحداثى متعامد إرسم Δ و B حيث و نقطة الأصل ، $B = (3, 0)$ ، $C = (3, 4)$

ثم بين على الرسم :

١ - صورة Δ و B بالدوران حول و بزاوية قياسها 90°

٢ - صورة Δ و B بالدوران حول و حيث : $(S, V) \leftarrow (-S, -V)$

(٧) إرسم $\overline{PB}$ ثم عين B' صورة B بدوران حول P بزاوية قياسها 60° ، وإذا كان

$\overline{PB} = (3 - S)$ سم ، $\overline{PB'} = (S + 2)$ سم أوجد طول $\overline{PB}$

(٨) إرسم المستطيل $PABD$ الذى فيه $PB = 3$ سم ، $AB = 4$ سم ، M نقطة تقاطع قطريه

١، (Δ ب م) = ٥٥° ثم أوجد صورته :

١ - بالدوران حول م بزاوية قياسها = (Δ ب م)

٢ - بالدوران حول م بزاوية قياسها - ٦٠°

أحمد الشنتوري